称号及び氏名	博士（工学） 藤本 皓大
学位授与の日付	2017 年 3 月 31 日
論　文　名	「Asymptotic Behavior of Solutions for Ordinary Differential Equations with φ-Laplacian」 （φ-Laplacian を持つ常微分方程式の解の漸近挙動）
論文審査委員	主査 松永 秀章 副査 壁谷 喜継 副査 田畑 稔 副査 山岡 直人

論文要旨

常微分方程式は, ニュートンの運動方程式に代表されるように, 自然科学, 社会科学, 応用科学における様々な数理モデルに用いられている. 常微分方程式のうち, 線形方程式は, 非線形方程式と比較して, ラプラス変換や冪級数解法といった古典的な手法を用いて解析的に解ける場合が多い. すなわち, 線形常微分方程式の解は公式を用いて書き下すことができる. それに対して, 一般に非線形常微分方程式の解は, 計算機によって数値解を局所的に求め, 可視化することはできても, 具体的に数式で書き下すことはできない. したがって, 非線形常微分方程式を解くことなく, その解が持つ定性的性質を解明することは, 数学的理論のみならず応用上においても非常に重要である.

常微分方程式の解が持つ定性的性質の例としては, 存在性, 一意性, 振動性, 安定性や有界性などが挙げられる. その中でも, 振動性や安定性, リミットサイクルなどに代表される解の漸近挙動は, 様々な分野における自然現象や社会現象を説明づけるために有用であり, 古くから研究されてきた. 常微分方程式の解の漸近挙動について調べるためには, そもそも, その解が時間無限遠方で存在していること, すなわち, 解の大域存在性を示す必要がある. そのため, 従来の常微分方程式論において, 解が具体的に求まらない場合には, 全ての解が大域的に存在するような状況下に限定して, 解の漸近挙動について議論されることがほとんどであった. しかし, 一般には常微分方程式の解は大域的に存在するとは限らない. 例えば, よく知られているように, ロジスティック方程式

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

の初期条件 $x(0)=x_0 \in \mathbb{R}$ をみたす解は, ロジスティック関数

$$x(t)=\frac{Kx_0e^{rt}}{K-x_0+x_0e^{rt}}$$

で与えられる. ただし, r, K はともに正の定数である. このとき, ロジスティック方程式の解は, $x_0>0$ ならば定常解 $x(t)=K$ に漸近し, $x_0=0$ ならば自明解 $x(t)=0$ となるが, $x_0<0$ ならば有限時間

$$T=\frac{1}{r}\log\left(\frac{K-x_0}{-x_0}\right)$$

で $-\infty$ に発散する.

本論文の目的は, 常微分方程式の解の大域存在性と非大域存在性に関する判定法を与え, さらに, 解の大域存在性が保証されない状況下において, 解の漸近挙動について調べるための新たな手法を構築することである. 本論文は 4 章からなり, 以下に各章の概要を記す.

第 1 章では, 研究の背景および目的についてまとめ, 本論文の構成と概要を述べる.

第 2 章では, 2 階非線形常微分方程式

$$(\varphi(x'))'+\lambda\varphi(x)=0 \tag{1}$$

について考える. ただし, λ は正の定数とし, $\varphi:(-\rho,\rho)\to(-\sigma,\sigma)$ ($0<\rho\le\infty, 0<\sigma\le\infty$) は $(-\rho,\rho)$ 上で連続かつ狭義単調増加な奇関数で, 全単射であるとする. ここで, 方程式 (1) の第 1 項 $(\varphi(x'))'$ は φ-Laplacian と呼ばれ, p-Laplacian や平均曲率作用素など, 数学的理論のみならず応用上も有用な微分作用素の一般化である.

関数 $\varphi(x)$ が $\varphi_p(x)=|x|^{p-2}x$ ($p>1$) のとき, φ-Laplacian は p-Laplacian になり, 方程式 (1) は半分線形と呼ばれる 2 階非線形常微分方程式

$$(\varphi_p(x'))'+\lambda\varphi_p(x)=0 \tag{2}$$

になる. Došlý and Řehák [*Half-Linear Differential Equations* (2005)] によれば, 方程式 (2) の全ての解は大域的に存在することが知られており, 実際, 方程式 (2) の大域解を用いて一般化三角関数と呼ばれる関数が定義される. さらに, それを利用して一般化極座標変換や一般化フーリエ級数などを導入することにより, p-Laplacian を持つ様々な常微分方程式の解の性質が調べられてきた. 一方, 関数 $\varphi(x)$ が $\varphi_C(x)=x/\sqrt{1+x^2}$ のとき, φ-Laplacian は平均曲率作用素になり, 方程式 (1) は 2 階非線形常微分方程式

$$(\varphi_C(x'))'+\lambda\varphi_C(x)=0 \tag{3}$$

になるが, 方程式 (3) の解が時間無限遠方で存在するかどうかは未解明であった.

そこで, 本論文では, これまで見過ごされていた, 方程式 (3) を含む方程式 (1) の解の大域存在性に注目する. 具体的には, 相平面解析やタイムマップの手法を用いて, 方程式 (1) の解が大域的に存在するための必要十分条件を与える. また, 方程式 (1) の全ての大域解が周期的に振動することを示し, その周期を具体的に求める. 大域解でない解に対しては, 途切れる時

刻を具体的に与える. さらに, 負の減衰項を持つ 2 階非線形常微分方程式

$$(\varphi(x'))' - \mu\varphi(x') + \lambda\varphi(x) = 0$$

の全ての解が有限時間で途切れるための十分条件を得る. ここで, μ は正の定数である. 加えて, 方程式 (1) の一般化である, 2 階非線形常微分方程式

$$(\varphi(x'))' + g(x) = 0 \tag{4}$$

に対する解の大域存在性および振動性を, 条件 $\rho = \infty$ の下で分類する. ただし, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続かつ $xg(x) > 0$（$x \neq 0$）をみたす奇関数とする. この分類により, $\rho = \infty$ の場合には, 関数 $\varphi(x)$ が条件

$$\int_0^\sigma \varphi^{-1}(\xi)\, d\xi < \infty \tag{5}$$

をみたすとき, 方程式 (4) の解であって, 有限時間で途切れてしまうものが存在することが示される.

第 3 章では, $\rho = \infty$ の下で, リエナール型の方程式を含む 2 階非線形常微分方程式

$$(\varphi(x'))' + \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\varphi^n(x') + g(x) = 0 \tag{6}$$

に対するリミットサイクルの存在性について考える. ただし, $N \in \mathbb{N}$ とし, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$（$n = 1, 2, \dots, N$）は連続な偶関数とする.

リミットサイクルの概念は, 1880 年代にポアンカレによって導入された. 今日では, リミットサイクルは数学のみならず物理学、化学、生物学など幅広い研究分野において重要な役割を担っている. 例えば, リエナール方程式のモデルケースであるファン・デル・ポール方程式のリミットサイクルが, 3 極真空管を含む電気回路の誘起する安定な振動現象を記述することはよく知られている（Aubin and Dalmedico [*Historia Math.* (2002)] を参照）. 方程式 (6) は $\sigma = \infty$, $\varphi(x) = x$, $N = 1$ のとき, リエナール方程式

$$x'' + f_1(x)x' + g(x) = 0 \tag{7}$$

となる. 全ての解が大域的に存在するような状況下における方程式 (6) や (7) に対するリミットサイクルの性質については, 過去 1 世紀にわたって多くの研究がなされてきた（例えば, Liénard [*Revue générale de l'Electricité* (1928)] を参照）.

本論文では, 条件 (5) が成り立つ, すなわち, 有限時間で途切れてしまう解が存在する状況において, 方程式 (6) のリミットサイクルが存在するための十分条件を与える. 証明には, 相平面解析, 方程式 (4) の解の大域存在性, リヤプノフ関数, ポアンカレ・ベンディクソンの定理を用いる. さらに, $N = 1$ の場合には, 方程式 (6) がリミットサイクルを持つためのより詳細な条件を求め, リミットサイクルを持たないための十分条件も与える. これらの結果を用

いれば, 平均曲率作用素を持つファン・デル・ポール型の 2 階非線形常微分方程式

$$(\varphi_C(x'))' + (x^2 - \delta^2)\varphi_C(x') + x = 0$$

は, 正の定数 δ が小さければリミットサイクルを持ち, δ が大きければリミットサイクルを持たないことが示される.

第 4 章では, 本論文で得られた結果を総括する. 本論文で構築する新たな手法は, 方程式 (6) に限らず, φ-Laplacian を持つ他の常微分方程式に対しても適用でき, 解の大域存在性が保証されない状況下において, リミットサイクルの存在性のみならず, 解の様々な漸近挙動を解明できると期待される.

審査結果の要旨

本論文はリエナール型常微分方程式の解の漸近挙動に関する研究を行ったものである。具体的には、p-Laplacian や平均曲率作用素を一般化した微分作用素 φ-Laplacian をもつ常微分方程式の解の大域的存在性およびリミットサイクルの存在性を考察し、相平面解析を駆使することにより、以下の成果を得ている。

(1) 1 次元 p-Laplacian と 1 次元平均曲率作用素の相違点に着目し、それらを一般化した φ-Laplacian をもつ常微分方程式の解が大域的に存在するための必要十分条件を与えた。大域的な解が存在する場合には、その解が三角関数のように、周期的かつ振動的であることも示した。さらに、その必要十分条件を利用して、減衰項をもつ定数係数の方程式に対し、全ての非自明解が大域的に存在しないための十分条件を与えた。得られた成果によって、平均曲率作用素を定義する際に用いる関数の値域の有界性が、大域解の存在性に大きな影響を及ぼすことが解明された。

(2) 関数 φ の有界性を仮定し、φ-Laplacian をもつリエナール型常微分方程式が有限時間で途切れてしまうような解をもつ状況下でリミットサイクルの存在性を考察した。リミットサイクルが存在するための十分条件は、ポアンカレ・ベンディクソンの定理を用いて証明されるが、その定理を適用するために、内側と外側に境界をもち、平衡点を含まない正の不変集合を φ-Laplacian をもつリエナール型常微分方程式の大域解を用いて構成した。さらに、その十分条件が妥当なものであることを示すために、φ-Laplacian をもつリエナール型常微分方程式がリミットサイクルをもたないための十分条件も与えた。

以上の成果は、常微分方程式の定性的理論において、大域解と非大域解が混在する場合に対しても数学解析が可能であることを示した新しい枠組みの研究であり、本分野への学術的な発展に大きく貢献したものといえる。また、申請者が自立して研究活動を行うにあたり、十分な能力と学識を有することを証するものである。