称号及び氏名　　博士（理学）　釣井　達也

学位授与の日付　平成 28 年 9 月 25 日

論　　文　　名　　Constructions of hypergroups （ハイパー群の構成）

論文審査委員　　主査　大内　本夫
副査　入江　幸右衛門
副査　丸田　辰哉

Constructions of hypergroups.

(ハイパー群の構成)

論文要旨

理学系研究科 情報数理科学専攻
釣井 達也

ハイパー群の概念は、1975 年頃に C. F. Dunkl, R. I. Jewett, R. Spector 達によってその公理が確立された。ハイパー群の概念は、群の概念を一般化したものであり、ハイパー群は様々なところに現れる。最も簡単な、群ではないハイパー群は、正三角形の辺上の対称ランダムウォークを考えることで得ることができる。また、ハイパー群は直交多項式とも密接な関係がある。例えば、第 1 種チェビシェフ多項式から得られるハイパー群は、$\mathbb{Z}$ 上のランダムウォークから得られるハイパー群と同型である。

ハイパー群の公理が確立されてから、ハイパー群の構造について多くの研究が行われた。しかし、その構造については、低位数の場合に限ってもあまり多くのことが知られているとは言い難い。低位数のハイパー群の構造については、2002 年に N. J. Wildberger が位数 3 のハイパー群の構造を決定し、2008 年に市原亮、河上哲が自明でない部分ハイパー群を持つ位数 4 のハイパー群の構造を決定したが、それ以上のことは未だ解明されていない。

ハイパー群がどのように構成されるかを知ることは、ハイパー群の構造を知るうえで非常に重要な問題である。そこで、本論文ではハイパー群の構成方法について、いくつかの方法について考察を行った。

第 1 章と第 2 章でハイパー群の基本的な概念を述べた後、第 3 章ではハイパー群の拡大問題を解くことで得られるハイパー群について述べた。H と L をハイパー群とする。このとき,

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 1$$

が exact であるとき、K を L の H による拡大ハイパー群という。ハイパー群の拡大問題とは、ハイパー群 H と L が与えられたとき, 拡大ハイパー群 K の構造を全て決定せよという問題である。この問題を解決する 1 つの方法として、ハイパー群の作用という概念を導入し、ハイパー群の拡大問題に応用した。

第 4 章では、群やハイパー群の構造を q-変形することで、新しいハイパー群を構成する方法について考察を行った。例えば、位数 2 のハイパー群 $\mathbb{Z}_q(2) = \{c_0, c_1\}$ の構造は,

$$c_1 \circ c_1 = qc_0 + (1-q)c_1, \quad (0 < q \leq 1)$$

である. これは, $q = 1$ のとき, 位数 2 の巡回群 $\mathbb{Z}_2$ と同型であることから, 位数 2 のハイパー群 $\mathbb{Z}_q(2)$ は位数 2 の巡回群 $\mathbb{Z}_2$ をパラメータ q で q-変形したものだと解釈することができる。この発想を用いて、まず最初に有限群と有限ハイパー群に対して、その q-変形から得られるハイパー群の考察を行った。その結果、位数 6 の群でない非可換なハイパー群等、多くの新しいハイパー群を構成することができた。

このことからも、群やハイパー群の q-変形はハイパー群の構造を理解するのにとても有効な方法であると言える。次に、可算離散可換ハイパー群に対しても同様の議論を行った。特に、可算離散可換ハイパー群の場合は、q-変形 (deformation) の定義が存在していなかったので、本章で新しく定義を与えた。ここでは、可算離散可換ハイパー群の代表的な例である第 1 種チェビシェフハイパー群と第 2 種チェビシェフハイパー群の q-変形を与えることができた。

第 5 章では、コンパクト群とその部分群の包含関係から得られるハイパー群について論じた。G をコンパクト群とし、G の有限次元表現全体の集合を $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(G)$ とする. $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}(G)$ の既約分解が

$$\pi \cong m_1\pi_1 \oplus \cdots \oplus m_l\pi_l$$

となるとき、既約表現 π_j の重複度 m_j を $[\pi : \pi_j]$ で表す。コンパクト群 G に対して、G_0 を G の部分群とし、それぞれの既約表現の同値類全体の集合 $\hat{G}$, $\widehat{G_0}$ で表す。このとき、$\pi \in \hat{G}$, $\tau \in \widehat{G_0}$ に対して、

$$[\mathrm{ind}_{G_0}^{G} : \pi] = [\mathrm{res}_{G_0}^{G}\pi : \tau] \quad (\text{フロベニウスの相互律})$$

が成り立つ。この事実により、$\hat{G} \cup \widehat{G_0}$ を頂点とするフロベニウスグラフが自然に得られる。このフロベニウスグラフに対して、表現の誘導と制限を活用することでハイパー群 $\mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0})$ を構成することができた。

第 6 章では、第 5 章と同様の議論をコンパクトハイパー群 H とその部分ハイパー群 H_0 の対に対して行った。ここでも、第 5 章と同様のハイパー群 $\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0})$ を構成することができた。

第 7 章では、第 5 章と第 6 章で行った議論をコンパクトでない群やハイパー群の場合に対して行った。その結果、hyperfield という概念を用いることで、可算離散可換強ハイパー群 H と H の閉部分ハイパー群 H_0 で annihilator が H のなかでコンパクトなものに対して、$\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0})$ の構造とその双対 $\hat{\mathcal{K}}(\hat{H} \cup \widehat{H_0})$ の構造を明らかにした。

最初に述べたように、位数 3 のハイパー群の構造は N. J. Wildberger によって明らかにされた。その時に、すべての位数 3 のハイパー群は可換ハイパー群であることが明らかにされている。そこで、第 8 章では、ハイパー群の可換性に着目して議論を行った。その結果、位数 4 以下のハイパー群はすべて可換であることを示した。さらに、群の場合は、最も位数の低い非可換な群は 3 次対称群で、その位数は 6 であるのに対して、ハイパー群では位数が 5 の非可換なハイパー群が存在することがわかった。

論文

(1) *Deformations of finite hypergroups*, S. Kawakami, T. Tsurii and S. Yamanaka, Scientiae Mathematicae Japonicae, 2015, published online (2015-21).

(2) *Deformations of the Chebyshev hypergroups*, T. Tsurii, Scientiae Mathematicae Japonicae, 2015, published online (2015-54).

(3) *Hypergroups arising from characters of a compact group and its subgroup*, H. Heyer, S. Kawakami, T. Tsurii and S. Yamanaka, submitted, available in arXiv : 1605.03744v1[math.RT].

(4) *Hypergroups related to a pair of compact hypergroups*, H. Heyer, S. Kawakami, T. Tsurii and S. Yamanaka, submitted, available in arXiv : 1605.07010v1 [math.RT].

(5) *A commutative hypergroup associated with a hyperfield*, H. Heyer, S. Kawakami, T. Tsurii and S. Yamanaka, submitted, available in arXiv : 1604.04361v1 [math.FA].

(6) *Non-commutative hypergroup of order five*, Y. Matsuzawa, H. Ohno, A. Suzuki, T. Tsurii and S. Yamanaka, Journal of Algebra and Its Applications, accepted.

紀要等

(1) *Actions of Finite Hypergroups and Applications to Extension Problem*, S. Kawakami, I. Mikami, T. Tsurii and S. Yamanaka, 奈良教育大学紀要, Vol. 60 (2011), No. 2, pp.19-28.

(2) *Signed Actions of Finite Hypergroups and the Extension Problem*, S. Kawakami, M. Sakao, T. Tsurii and S. Yamanaka, 奈良教育大学紀要, Vol. 61 (2012), No. 2, pp.13-24.

口頭発表

(1) ハイパー群の作用と拡大ハイパー群, 河上 哲, 三上 いつみ, 釣井 達也, 山中 聡恵, 日本数学会 (於 名古屋大学), 2010 年 9 月.

(2) Signed actions of hypergroups and the extension problem, 河上 哲, 坂尾 祥文, 釣井 達也, 山中 聡恵, 日本数学会 (於 東京理科大学), 2012 年 3 月.

(3) Deformations of Finite Hypergroups, 河上 哲, 釣井 達也, 日本数学会 (於 京都大学), 2013 年 3 月.

(4) Deformations of Hypergroups, 釣井 達也, 2013 年作用素論・作用素環論研究集会 (於 お茶の水女子大学), 2013 年 11 月.

(5) Deformations of finite groups and hypergroups, 釣井 達也, 表現論シンポジウム (於 淡路島 夢海遊), 2014 年 11 月.

(6) 有限群とその部分群の表現から得られるハイパー群, Herbert Heyer, 河上 哲, 釣井 達也, 山中 聡恵, 日本数学会 (於 明治大学), 2015 年 3 月.

(7) ハイパー群とその部分ハイパー群の表現から得られるハイパー群, Herbert Heyer, 河上 哲, 釣井 達也, 山中 聡恵, 日本数学会 (於 明治大学), 2015 年 3 月.

(8) A hypergroup arising from characters of a compact hypergroup and its subhypergroup, Herbert Heyer, 河上 哲, 釣井 達也, 山中 聡恵, 日本数学会 (於 京都産業大学), 2015 年 9 月.

(9) A commutative hypergroup associated with a hyperfield, Herbert Heyer, 河上 哲, 釣井 達也, 山中 聡恵, 日本数学会 (於 京都産業大学), 2015 年 9 月.

(10) Non-commutative hypergroup of order five, 松澤 泰道, 大野 博道, 鈴木 章斗, 釣井 達也, 山中 聡恵, 日本数学会 (於 筑波大学), 2016 年 3 月.

学位論文審査結果の要旨

ハイパー群は群の概念を拡張したもので，その公理は1975年頃に確立されたが，ハイパー群自身の構造についてはいまだに十分な解明がなされていない．有限ハイパー群の構造に関して，位数3のハイパー群の構造はすべて決定されているが，位数4以上のハイパー群の構造はまだ完全にはわかっていない．ハイパー群がどのように構成されるか知ることはハイパー群の構造を解明するために重要である．また，位数3以下のハイパー群がすべて可換であることは知られているが，低位数のハイパー群の可換性についてはまだ十分に研究が進んでいない．なお，群においては，非可換群の最低位数は6である．本研究においては，ハイパー群の構成に関して，いくつかの方法について考察するとともに，低位数の非可換なハイパー群の構成も行っている．

本研究の主要な結果は以下の通りである．

1. ハイパー群 H と L からなる完全系列

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 1$$

に対して，ハイパー群の作用という概念を導入することにより，ハイパー群の構成法を示した．

2. 有限ハイパー群の q-変形により，群ではない位数6の非可換なハイパー群を構成した．

3. 可換離散ハイパー群に対して，q-変形の概念を導入し，第1種チェビシェフハイパー群と第2種チェビシェフハイパー群に対する q-変形を与えた．

4. 局所コンパクト群とその部分群または局所コンパクトハイパー群とその部分ハイパー群の対に関して，既約表現の同値類の集合を考察することにより，ハイパー群を構成した．

5. 位数5の非可換なハイパー群を構成した．また，位数4のハイパー群はすべて可換であることを示した．

以上得られた成果は，ハイパー群の構造の解明と低位数のハイパー群の非可換性についての研究に大きく貢献するものであり，今後，ハイパー群の構造とその非可換性に関する研究において活用されることが期待される．

本委員会は当該論文が博士 (理学) の学位を授与するに相当すると判断した．

学位論文審査委員会
入江　幸右衛門
大内　本夫　（委員長）
丸田　辰哉