

称号及び氏名 博士（工学） 井門 英司

学位授与の日付 平成 19 年 3 月 31 日

論文名 「ネットワークの信頼性を向上させる  
グラフ構成法に関する研究」

論文審査委員 主査 大松 繁  
副査 松本 啓之亮  
副査 市橋 秀友

## 論文要旨

通信網を代表とするネットワークは、通信局を節点に、通信回線を枝に対応付けた無向グラフで表現できる。すなわち、節点の集合を  $V$ 、枝の集合を  $E$  とすれば、無向グラフは  $G = (V, E)$  で表わされる。

本研究は、グラフの木の個数、ネットワーク信頼度およびグラフの連結度の観点から、対象とするネットワークの信頼性を評価し、その信頼性を維持・向上させるグラフ構成法に関して考察したものである。

近年、電話を中心として発展してきた通信網は、通信量の増加とデジタル技術の進歩により、新たにデジタル通信網を誕生させた。このデジタル通信網は、今日では、インターネットの急速な普及により、コンピュータネットワークとして、その重要性が益々高まっている。この間、交換機は機械式から電子式になり、通信回線は同軸ケーブルから光ファイバーケーブルになった。さらに、インターネットには高性能のルータが投入され、その結果、通信の高速化、信頼性の向上、低コスト化が実現されてきた。このような設備・機器の技術的進歩に加えて、通信局と通信回線の接続関係の改良が、ネットワークの信頼性の向上には不可欠である。

このネットワークの通信局と通信回線の接続関係に関連した信頼性評価に関する従来の研究は、グラフの木の個数、ネットワーク信頼度およびグラフの連結度を評価規範としたものが多く、これらはネットワーク信頼性を測る重要な評価基準である。

まず、グラフの木は、グラフのすべての節点を連結し、閉路をもたない部分グラフであり、その個数が大きいことに意味がある。木の個数に関する研究では、すべての節点間に1個ずつ枝をもつ完全グラフから、特定の部分グラフを除去したグラフの木の個数を表わす表現式を導出するもの、木の個数が最大となるように完全グラフからある範囲内で1個ずつ枝を除去する報告がある。また、完全グラフを連結して得られたグラフの木の個数を特徴付ける研究もある。これらはいずれも、基本的な節点行列式に基づく方法である。しかし、枝を1個ずつ追加しながら、その都度木の個数を最大化するという、基礎的な問題を検討したものは少ない。

つぎに、ネットワーク信頼度は、枝 $i$ が正常に機能する確率を $p_i$ 、故障する確率を $q_i (=1-p_i)$ とすると、故障となった枝を除去しても、健全な枝だけで構成される木が、少なくとも1個存在する確率である。このネットワーク信頼度の算定に関しては、枝の短絡と開放による排反事象を生成することにより、確率計算を単純化する報告が多い。しかし、信頼度の近似値の算定に関しては、近似値がもつ誤差の評価が厳密ではなかった。

最後に、グラフ $G$ の連結度は、2節点 $i, j$ 間を分離するために除去すべき節点の最小数を局所連結度 $\kappa(i, j)$ として、この $\kappa(i, j)$ の最小値がグラフ $G$ の連結度 $\kappa(G)$ である。いま、グラフ $G=(V, E)$ の節点数を $n=|V|$ とすると、指定した連結度 $k(2 \leq k \leq n-1)$ を有し、枝数 $b=|E|$ が最小数 $\lceil (kn+1)/2 \rceil$  ( $\lceil \cdot \rceil$ はガウス記号)であるグラフ $G$ の構成法はいくつか存在する。しかし、それらは、連結度を $k+1$ とする場合には、既設の枝を開放し新たに枝を付加する必要があるとか、節点数が偶数に限定されている。それゆえ、節点数 $n$ の奇数・偶数を問わず、枝を付加するのみで連結度 $k$ を $2 \leq k \leq n-1$ の範囲内で1ずつ増加できるグラフ構成法が望まれる。

本論文は、これらの問題を解決し、ネットワークの信頼性を向上させるグラフ構成法に関する研究成果をまとめたものである。

第1章では、本研究の背景ならびに目的を述べるとともに、研究内容の概要について述べた。

第2章では、グラフの木の個数を最大とする枝の除去法および枝の付加法を提案した。まず、節点数 $N$ の完全グラフから互いに共通な節点を持たない枝数 $n_i$ の閉路( $n_i$ サイクルという)を除去したグラフに対して、節点行列式を展開し、木の個数を表わす表現式を導出した。とくに、 $v(=\sum_i n_i, v \leq N)$ 個の枝を除去する場合、 $n_i$ に関する木の個数の変化について考察した結果、互いに共通な節点を持たない3サイクルを構成する枝を可能な限り多く除去する場合に木の個数が最大となり、4サイクルを構成する枝を可能な限り多く除去する場合に最小となることを示した。また、既存のグラフに対して、新たに1個の枝を付加する場合、木の個数を大きくする2節点を求める問題に関して、ある条件を満たす場合に、次数の小さい節点と基準点との間に枝を付加する場合が優位となる構成法を導出した。最後に、対象とするグラフが部分的な完全グラフ(クリーク)を含む場合に、並列枝ではなく非並列枝を付加する方が木の個数を大きくすることを示した。

第3章では、木の個数を最大とする枝付加を行なう問題に関して、節点行列式の数値を使用して、枝を1個付加するごとに木の個数を最大とする過程を反復適用する枝付加法を提案した。この枝付加法は、第2章において、木の個数を表わす節点行列式の算定が困難な場合に、初期グラフを指定して枝付加を実行する方法である。ここでは、木構造をもつ2種類の初期グラフ、**series-edge tree** および **star-shape tree** を対象とした場合、得られた付加枝の系列は、長い閉路を構成する枝配置であり、各節点に接続する枝の個数（次数）がバランス良く配置されていることを示した。また、最小数の木の個数を与える枝系列は、初期グラフが木構造であれば、クリークを拡大する枝付加を行ない、同数の最小数の木が実現されていることが分かった。

木の個数を最大とする枝系列を求める過程で、最大の木の個数を与える枝が2個以上存在する場合が頻繁に現われるが、これらがすべて同形グラフであることを明らかにした。これは、複数個の候補の中からどの枝を選択しても、それ以降の枝付加に影響しないことを意味しており、提案した連続的な枝付加法が妥当なグラフ構成法であることを示している。この枝付加法によるグラフは、連結度という基準に対しても、優れた評価であることを明らかにした。

第4章では、ネットワーク信頼度の近似値がもつ誤差を明確にすることを目的として、排反事象を生成する手法を考察した。とくに、枝の短絡と開放を基本操作として、グラフのすべての木を含む排反木事象の生成と、グラフのカットを含む排反カット事象の生成を同時に実行する手法を提案した。その結果、ネットワーク信頼度を、枝が正常に機能する確率  $p$  および故障する確率  $q (=1-p)$  の多項式で表現することと、ネットワーク信頼度の上限と下限の2つの近似値が両側から真値へ収束することにより、任意の誤差でネットワーク信頼度を算定することが可能であることを明らかにした。

また、これらの排反事象の生成に際し、次数の小さい節点に接続する枝から短絡・開放を実行する方が、実行時間（排反カット事象数）の面で効率的であることを明らかにした。さらに、ネットワーク信頼度に関連して、枝の短絡・開放を基本とする部分グラフの求め方を提案した。

第5章では、グラフの連結度を基準として、グラフ構成法と拡張法を考察した。まず、節点数  $n$  に対して、 $n$  サイクルを初期グラフとして、既存の枝を除去することなく、必要最小数の枝を順次付加するだけで、グラフの連結度  $k$  を  $2 \leq k \leq n-1$  の範囲内で連続的に増加させるグラフ構成法を提案した。この構成法によるグラフは、最小の枝数  $\lceil (kn+1)/2 \rceil$  で連結度  $k$  を実現している。また、連結度  $k$  を満たしながら、グラフの重ね合わせによる連結度の向上、節点の新設や枝によるグラフ同士の結合法を例示し、通信局の新設やネットワーク同士の結合によるネットワークの拡張手法を提案した。

第6章では、本論文で得られた結果の総括を行なった。

## 審査結果の要旨

本論文は、通信網を代表とするネットワークの信頼性を、通信局を節点に、通信回線を枝に対応付けた無向グラフにおける枝の配置に注目して論じ、グラフの木の個数を最大とする枝除去・枝付加によるグラフ構成法、ネットワーク信頼度の厳密な近似値算定法、枝を付加するだけで連結度を連続的に増加するグラフ構成法等の新しい方法を提案し、これらの方法がネットワークの信頼性の維持・向上に有用であることを、理論的または数値的に検証したものであり、次のような成果を得ている。

(1) 節点数  $N$  の完全グラフから、節点を共有しない長さ  $n_i$  の閉路を  $k$  個除去するとき、 $n_i=3$  の場合に木の個数が最大となる。また、節点数  $N$  で節点  $1, 2, \dots, i, \dots, n=N-1$  がクリークを形成するグラフでは、2 節点  $i, N$  間に非並行枝を付加する場合は木の個数が最大となる。

(2) 2 種類の木構造グラフを初期グラフとして、枝を 1 個ずつ付加するごとに木の個数を最大とするグラフ構成法を提案し、この枝付加法では 60% 以上の場合に同一で最大の木の個数を与える枝が複数個存在するが、これらが全て同形グラフであることを実証し、任意の枝選択がこれ以降のグラフ構成に影響しないことを示した。

(3) ネットワーク信頼度は少なくとも木が 1 個存在する確率  $R$  であり、枝の短絡と開放を反復して 2 種類の排反事象を同時に生成する方法を提案することにより、確率  $R$  の真値を表わす表現式を与えると共に  $R$  の上限と下限を示した。これにより、従来、厳密でなかった確率  $R$  の近似値を、任意の厳密な誤差で算定することを可能とした。

(4) 節点数  $n$  で連結度  $k$  をもつグラフに対する従来の構成法は、連結度を  $k+1$  とするには枝の除去を伴うか、節点数  $n$  が偶数に限定される。提案するグラフ構成法は、節点数  $n$  の奇数・偶数に関わらず、枝付加のみで連結度  $k$  を  $2 \leq k \leq n-1$  の範囲で順次増加でき、また、節点数  $n$  が偶数の場合には、連結度が  $k_1$  および  $k_2$  のグラフを重ねて連結度が  $k_1+k_2$  のグラフを得るなど、応用範囲が広いグラフ構成法であることを示した。

以上の研究成果は、知能情報工学におけるネットワークの信頼性の維持・向上を考慮した通信網等の構成法に新しい知見を与えるものであり、この分野に貢献するところ大である。また、申請者が自立して研究活動を行うに必要な能力と学識を有することを証したものである。学位論文審査委員会は、本論文の審査ならびに学力確認試験の結果から、博士（工学）の学位を授与することを適当と認める。