

称号及び氏名 博士(理学) 天川 晃佑

学位授与の日付 2021年6月30日

論文名 Color algebraic extensions of supersymmetric quantum mechanics and representation theory of \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ algebra
(超対称量子力学のカラー代数的拡張と \mathbb{Z}_2^2 - $osp(1|2)$ の表現論)

論文審査委員 主査 会沢 成彦
副査 田中 智
副査 大西 利和
副査 源 泰幸

論文要旨

Color algebraic extensions of supersymmetric quantum mechanics and representation theory of \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ algebra

超対称量子力学のカラー代数的拡張と \mathbb{Z}_2^2 - $osp(1|2)$ の表現論

理学系研究科物理科学専攻
数理物理研究室
天川晃佑

研究背景

物理の理論の構築や物理法則において対称性という概念が重要な役割を果たすことはよく知られている。対称性とはある変換に対して物理法則が変わらないという性質のことを指し、個々の理論がどのような対称性を持つかによりその理論が特徴づけられる。対称性が重要である理由の一つとして原理としての役割がある。Einstein により提唱された特殊相対性理論は特殊相対性原理を前提としている。対称性の観点から言えば特殊相対性原理は平行移動と Lorentz 変換をあわせた Poincaré 変換の下で理論が対称 (不変) であるということの意味している。また、対称性から保存則が得られることが知られている。連続的な対称性が存在する場合、それに対応する保存量が得られ、これは Noether の定理と呼ばれている。この定理によれば、時空の平行移動に対してはエネルギーが、空間回転に対しては角運動量が保存量として得られる。このように理論が持つ対称性を明らかにすること、どのような物理法則に従うかを調べることは直接的に関係しているのである。

対称性は多くの場合、Lie 代数という数学を用いて記述され、個々の対称性に対応する Lie 代数が存在する。先述の特殊相対性理論の対称性は Poincaré 代数と呼ばれる Lie 代数により記述される。従って、理論が持つ対称性を調べることは、その対称性を記述する Lie 代数について調べることに帰着する。

近年の研究で、新たな対称性として color super 代数と呼ばれる代数が記述する対称性の物理的重要性が注目されている。その理由として、フェルミオンの非相対論的な波動方程式である Lévy-Leblond 方程式や超対称な調和振動子の対称性が \mathbb{Z}_2^2 -graded color super 代数という color super 代数により記述されること明らかになったことが挙げられる。このように基礎的かつ物理的に意味のある物理モデルの対称性として color super 代数が現れるということからこの代数が物理的な意味を持つことが示唆される。さらに、Bruce と Duplij により超対称量子力学 (Witten モデル) の対称性が \mathbb{Z}_2^2 -graded color super 代数に拡張されることが示された。ボゾンとフェルミオンの混ぜ合わせに対する対称性を超対称性といい、超対称代数と呼ばれる Lie super 代数により記述される。この対称性を量子力学に応用したものを超対称量子力学と呼ぶ。Witten モデルは超対称量子力学の最も基本的なモデルであり、その原論文は 3000 以上もの引用があるだけでなく、物理や数学に応用されている。従って、Witten モデルの拡張である Bruce-Duplij のモデルを様々な観点から調べることが、 \mathbb{Z}_2^2 -graded color super 代数が持つ物理的意味の理解とその物理的応用への足がかりになると考えられる。

目的と成果

本研究の目的は color super 代数の物理的・数学的側面をより詳しく調べることにより、この代数が記述する対称性の物理的意味とその重要性を明らかにすることである。本論文ではその第一歩として、超対称量子力学の拡張という観点から color super 代数が生成する対称性について調べた。その成果を以下にまとめる。

1. 通常の Lie super 代数を \mathbb{Z}_2^2 -graded color super 代数に変換するような写像を導入し、これを拡張超対称量子力学 (Akulov-Kudinov モデル) に用いることで \mathbb{Z}_2^2 -graded 拡張超対称量子力学を構成した。さらに、そのスペクトルの一般的な性質を明らかにした (論文の第 2 章)。
2. 多くの超対称共形量子力学に対してその \mathbb{Z}_2^2 -graded 版が構成可能であることを示し、最も簡単な場合である \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ を対称性として持つモデルのスペクトル及び Hilbert 空間の構造を詳細に調べた (第 2 章)。
3. Bruce-Duplij のモデルの対称性を \mathbb{Z}_2^2 -graded color super 代数というより一般の color super 代数に拡張したモデルが存在し、かつ与えられた n に対して同値でない複数のモデルが存在することを示し、そのスペクトルの一般的な性質を明らかにした (3 章)。

このように対称性が color super 代数により生成されるような量子力学的モデルが数多く存在することが明らかとなった。これらの結果は color super 代数を研究するさらなる動機付けになると共に、color super 代数を対称性としてもつ量子力学のさらなる応用の道具だてになるであろう。

また、上記の成果 2 で得られたスペクトルは数学的には \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ の最低ウェイト表現というものの特別な場合に対応しており、通常の Lie super 代数 $osp(1|2)$ には対応物がない表現であることが分かった。この結果は \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ の既約表現が $osp(1|2)$ のそれより多く存在することを意味している。そこで、本論文では \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ の既約表現の分類を試み、その完全な分類に成功した (第 4 章)。これが本論文のもうひとつの大きな成果である。Color super 代数の既約表現の分類は過去に前例がなく、本論文の手法により一般の color super 代数の既約表現の分類への道筋がつけられたことになる。また、成果 2 の \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ 超対称共形量子力学は得られた既約表現の一例に過ぎず、他の既約表現を Hilbert 空間上で実現することにより、 \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ と量子力学との新たな関係を見いだすことが期待される。

Journal :

- *\mathcal{N} -Extension of double-graded supersymmetric and superconformal quantum mechanics,*
N. Aizawa, K. Amakawa, S. Doi,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 065205 (2020).
- *\mathbb{Z}_2^n -Graded extensions of supersymmetric quantum mechanics via Clifford algebras,*
N. Aizawa, K. Amakawa, S. Doi,
Journal of Mathematical Physics **61**, 052105 (2020).
- *A classification of lowest weight irreducible modules over \mathbb{Z}_2^2 -graded extension of $osp(1|2)$,*
K. Amakawa, N. Aizawa,
Journal of Mathematical Physics **62**, 043502 (2021).

Proceedings :

- *Color Algebraic Extension of Supersymmetric Quantum Mechanics,*
N. Aizawa, K. Amakawa, S. Doi,
M. B. Paranjape et al. (eds), Quantum Theory and Symmetries, 199-207, CRM
Series in Mathematical Physics, Springer, Switzerland (2021).

学位論文審査結果の要旨

学位論文題目

Color algebraic extensions of supersymmetric quantum mechanics and representation theory of \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ algebra

(超対称量子力学のカラー代数的拡張と \mathbb{Z}_2^2 - $osp(1|2)$ の表現論)

提出者氏名 天川 晃佑

本論文では、超対称量子力学の拡張という観点からカラー代数の生成する対称性について研究した結果が述べられている。カラー代数は Lie super 代数の自然な拡張であるが、それが生成する対称性が物理学において重要な意味を持つとは考えられてはいなかった。近年の研究によりカラー代数による対称性が多くの場面で見いだされるようになり、その物理的意味を明らかにしようという機運が高まっている。カラー代数による対称性のひとつに Bruce と Duplij による超対称量子力学 (Witten 模型) の \mathbb{Z}_2^2 -graded カラー代数への拡張がある (Bruce-Duplij モデル)。本論文では Bruce-Duplij モデルをより一般的な方法で再構成することにより、次の結果を得ている:

- (1) 拡張超対称量子力学 (Akulov-Kudinov 模型) の \mathbb{Z}_2^2 -graded 版を導入し、そのスペクトルの一般的性質を明らかにした。
- (2) 多くの超対称共形量子力学に対してその \mathbb{Z}_2^2 -graded 版を定義することができることを示し、もっとも簡単な場合である \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ を対称性として持つモデルの性質を明らかにした。
- (3) Bruce-Duplij モデルを \mathbb{Z}_2^2 -graded カラー代数に拡張したものが存在すること、しかも与えられた n に対して同値でない複数のモデルが存在することを示し、そのスペクトルの一般的性質を明らかにした。

このようにカラー代数による対称性を実現する多くの量子力学的なモデルが存在することが明らかとなった。

本論文のもうひとつの大きな結果は \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ の最低ウェイト既約表現の完全な分類を成し遂げたことである。カラー代数の表現の完全な分類は前例がなく、本論文の方法でより一般的なカラー代数の既約表現の分類への道が開けたことになる。また、(2) の \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ 超対称共形量子力学はたくさんある既約表現の中のひとつにすぎず、他の既約表現を Hilbert 空間上で実現することにより、 \mathbb{Z}_2^2 -graded $osp(1|2)$ と量子力学の新たな関係を見出すことが期待される。

以上のように、本論文はカラー代数の物理的・数学的理解を深めるものであり、本委員会は本論文が学位を授与するに十分な内容を持つものと判断した。

委員長 会沢 成彦
田中 智
大西 利和
源 泰幸