

称号及び氏名 博士（工学） テキ 博偉

学位授与の日付 令和 2 年 3 月 31 日

論文名 「結合した反応拡散モデルにおける平衡状態の
安定性・不安定性」

論文審査委員 主査 小西 啓治

副査 森澤 和子

副査 林 海

論文要旨

人工物や自然物に関わらず、振動するシステムは身の回りに多く存在している。それらの振動の中に、自励振動がある。自励振動は、システムに振動的でない一定のエネルギーを供給すると、そのエネルギーの一部がシステム内部で振動的なエネルギーに変わり、システムが振動することを指す。自励振動を伴うシステムは、「システムに微小な外乱が加わっても、振動の振幅・周波数は維持される」、「振動の振幅・周波数は初期値に依存しない」という特性を持つ。また、複数個の自励振動システムを相互に作用させると、多様な現象が観測される。たとえば、自励振動で発火するホテルが、一箇所に集まり、光情報で相互作用することで、全ホテルが同時に光る「集団発火現象」が見られる。

非線形科学分野では、自励振動システムを「振動子」という単純な数理モデルで扱うことが多い。相互作用している複数の振動子は、相互作用の数学的な表現である「結合」を複数の振動子間に施した「結合振動子」で表現される。結合振動子に生じる興味深い現象の一つに、すべての振動子が結合によって止まる「振動停止現象」がある。この現象を誘発する結合様式には、最も簡単な「拡散結合」と、振動子間の情報の伝達時間を考慮した「遅延結合」がある。

我々の身の回りには、振動だけでなく、様々な空間パターンが存在している。このようなパターンの発生メカニズムを理解するために、非線形科学分野では、反応拡散モデルと呼ばれるシンプルな数理モデルを用いた研究が行われている。反応拡散モデルは、反応を表す「反応項」と拡散を表す「拡散項」で構成されている。反応拡散モデルには「振動系」と「Turing系」と呼ばれる種別が存在する。振動系は、反応項に振動子を用いた反応拡散モデルである。これは多数の振動子を空間上で密に配置し、隣接する振動子に拡散結合を施したモデルに相当する。一方、Turing系は、安定な反応項が拡散項の導入によって不安定化された反応拡散モデルである。さらに、Turing系は、「ネットワーク上の Turing系」にも拡張されている。

一方、結合振動子における振動子に代わり、2個の反応拡散モデルを用意し、それらを結合させて生じる現象が非線形科学分野では精力的に調査されている。拡散結合された

Turing 系には, Black eye や White eye, 対称パターンや非対称パターン, Square パターンなどが生じる. また, 結合の方式としては, 遅延結合も検討されている. 振動系には, 拡散結合を施すと, 同期現象などが生じる. また, ネットワーク上の Turing 系を結合させた研究も実施されている.

結合された反応拡散モデルに生じる現象は, 非線形科学分野で強い興味を持たれており, 多くの成果が発表されている. しかし, 結合された「振動子」に生じる振動停止現象に関して積み重ねられてきた知見を, 結合された「反応拡散モデル」へ拡張する試みは殆どなされていない. この拡張は, 複数の反応拡散モデルに生じる空間パターンを「消去させる」「所望の状態へ移行させる」ことを実現する新たな制御手法の基盤的な知識となる. この拡張への第一歩として, 次の課題を検討することが必要だと考えられる. まず, 結合された振動系反応拡散モデルに, 振動停止現象が生じるのか否かを明らかにしなければならない. 次に, 結合された振動系反応拡散モデルには振動停止現象以外にどのようなタイプの非線形現象が生じるのか, また, それらの現象にはどのような関係が存在しているのかを明らかにすべきである. 最後に, 結合された「振動系」の反応拡散モデルだけでなく, 他の「系」の反応拡散モデルにも同様の検討が必要であろう. そこで, 人工物との親和性が高い現実的なモデルである, ネットワーク上で定義された Turing 系の反応拡散モデルに結合を施し, 振動停止現象が生じるかどうかの調査も重要な課題と考えられる. 本論文の目的は, 上記に示す課題に取り組むことである. 各章の内容は以下のとおりである.

第 1 章では, 本論文の研究背景, 研究目的, 概略を示した.

第 2 章では, 1 次元空間上で定義された 2 個の振動系反応拡散モデルに「拡散結合」または「遅延結合」が施された「結合モデル」を調査対象とした. ここでは, 代表的な振動系反応拡散モデルとして知られている複素 Ginzburg-Landau (CGL)モデルを扱うことにした. 拡散結合の場合, 振動停止現象が生じる条件を導出した. その条件から, 2 個の CGL モデルの周波数に差異が存在すれば, 拡散結合は振動停止現象を誘発するが, この差異が小さい又は無い場合, 誘発しないことを示した. また, この解析的な結果を数値シミュレーションでも確認した. 遅延結合の場合, 周波数の差異がない CGL モデルに振動停止現象が誘発されることを解析的に示した. さらに, 周波数の差異がない CGL モデルに対して, 媒体の大きさや境界条件に依存せずに振動停止現象を誘発する「結合強度」と「遅延時間」の設計手順を与えた. この設計手順に沿った結合強度と遅延時間が伴う結合を施すと, 振動停止現象は生じることを数値シミュレーションで確認した. また, 1 次元空間上の CGL モデルに対する「拡散結合における振動停止現象が生じる条件」「遅延結合における結合パラメータの設計手順」は 2 次元空間上の CGL モデルでも有効であることを示した. さらに, 遅延結合の場合, 設計手順に沿わない結合強度と遅延時間でも, 空間サイズや媒体条件によっては, 振動停止現象を誘発できる可能性があること, またその理由も明らかにした.

第 3 章では, 拡散結合または遅延結合を施した 2 個の 1 次元空間上の CGL モデルを研究対象とし, 第 2 章が扱わなかった振動停止現象以外の非線形現象を調査した. 具体的には, 結合 CGL モデルの平衡状態の不安定性を解析的に調査し, その平衡状態から生じる非線形現象を明らかにした. 拡散結合の場合, 結合 CGL モデルの平衡状態には「Hopf 不安定」と呼ばれる不安定性のみが発生した. この不安定性は, 単一の CGL モデルにも発生している. 一方, 遅延結合の場合, 結合 CGL モデルの平衡状態には「Wave 不安定」と呼ばれる不安定性も生じることを示した. この不安定性を持つ平衡状態から, 「スタンド波」と呼ばれる現象が生じることを数値シミュレーションで確認した. この現象は, 単一の CGL モデルや拡散結合を施した CGL モデルには見られなかった. さらに遅延結合の場合, 結合パラメータ空間上において, 結合 CGL モデルの平衡状態の安定性/不安定性が生じるパラメータ集合には明確な関係性があることを明らかにした. この関係性を数値シミュレーションでも確認した.

第 4 章では, 「ネットワーク上で定義された Turing 系反応拡散モデル」に拡散結合を施

した結合ネットワークに生じる振動停止現象を調査した。まず、2つのモデルのネットワークのトポロジーとパラメータが同一ならば、振動停止現象は生じないことを証明した。次に、2つのモデルのネットワークが共に4個のノードからなる Path グラフである場合を考えた。2つのモデルのネットワークの拡散速度が異なる状況で、2つのモデルのネットワークに拡散結合が施されると、その結合ネットワークに振動停止現象が生じることを数値シミュレーションで確認した。次に、片方のネットワークを Ring グラフに変えると、振動停止現象を誘発するパラメータ領域が変化した。

第5章では、本論文の成果をまとめ、今後の課題について述べた。

審査結果の要旨

本論文は、相互作用した2個の反応拡散システムに生じる安定化現象・不安定化現象に関して、その平衡状態の安定性を解析することで、さまざまな諸条件・関係性を明らかにしたものであり、以下の成果を得ている。

- (1) 2個の振動系反応拡散モデル(複素 Ginzburg-Landau (CGL)モデル)に拡散結合または遅延結合を施した結合モデルに研究の対象を絞り、そこに生じる安定化現象を調査している。その結果、拡散結合の場合は、振動停止現象が生じる条件と、周波数に差異が無い CGL モデルには振動停止現象が誘発されない事実を導出している。一方、遅延結合の場合は、周波数の差異が無い CGL モデルに振動停止現象が誘発されることを解析的に示し、振動停止現象を誘発する結合パラメータの設計手順が与えられている。
- (2) 拡散結合または遅延結合を施した2個の CGL モデルにおける平衡状態の不安定性を解析的に調査している。拡散結合の場合には、平衡状態に「Hopf 不安定」のみが発生すること、一方、遅延結合の場合には、「Wave 不安定」も生じることが示されている。さらに、平衡状態の安定性/不安定性が生じるパラメータ集合には、結合パラメータ空間上で明確な関係があることが導かれている。
- (3) 2個の Turing 系反応拡散ネットワークに拡散結合を施した結合ネットワークに生じる振動停止現象が調査されている。ネットワークのトポロジーとパラメータが同一であれば、振動停止現象は生じないことが明らかにされた。各ネットワークが4個のノードからなる Path グラフの場合、各ネットワークの拡散速度が異なる状況で拡散結合が施されると、その結合ネットワークに振動停止現象が生じることを数値シミュレーションで確認している。

以上の諸成果は、複数の反応拡散モデルに生じる空間パターンを「消去させる」「所望の状態へ移行させる」ことにつながる新たな制御手法の基盤的な知見となることが期待される。また、申請者が自立的に研究活動を行うのに必要な能力と学識を有することを証したものである。学位論文審査委員会は、本論文の審査および最終試験の結果から、博士(工学)の学位を授与することを適当と認める。