

称号及び氏名	博士（工学） 石川 大海
学位授与の日付	令和2年3月31日
論文名	「Theoretical Studies of Intermingled Basin Structure and Pattern Formation in Fir-Wave Regeneration based on Solvable Models (可解モデルを用いたインターミングルド・ベイسنの構造および縞枯れのパターン形成の研究)」
論文審査委員	主査 堀田 武彦 副査 岩住 俊明 副査 魚住 孝幸 副査 及川 典子

論文要旨

本論文では多安定性をもつ可解モデルを用いて(第一部)インターミングルド・ベイسنの多重フラクタル構造と終状態鋭敏性および(第二部)縞枯れ現象における規則的パターン形成について研究を行った。以下では、まず、第一部と第二部のそれぞれに関する背景と基本的な概念および得られた結果について説明する。次に、論文の各章の内容をまとめる。

相空間内部に複数のアトラクタが存在すると、どの初期状態がどのアトラクタ(終状態)に対応するのかという問題が考えられる。アトラクタのひとつがカオスアトラクタであると、そのベイسنの各点の任意の近傍に、別のアトラクタのベイسنが入り込むという極端に複雑な構造が生じることがある。このようなベイسنはリドルド・ベイسنとよばれ、自身に加え他のベイسنもリドルド・ベイسنである場合にはインターミングルド・ベイسنとよばれる。

第一部の目的はインターミングルド・ベイسنの構造解析である。その手法として、多重フラクタル構造を特徴づけるのに有効な特異性指数スペクトルを用いる。単純なりドルド・ベイسنに関してはすでに先行研究において、スペクトル解析の結果、その多重フラクタル性が特徴づけられているが、インターミングルド・ベイسنに関してはこのような解析の報告はなかった。インターミングルド・ベイسنをもつ可解なモデルにおいてスペクトル解析を行うことにより、本論文では以下の結果を得た。インターミングルド・ベイسنは特異性指数スペクトルによって特徴づけられる多重フラクタル性を持ち、スペクトルには相転移が起きる。この相転移にともなうスペクトルの線形部分は過渡過程の乱雑さによって決定される一方、線形部分以外の凸部分は、単純なりドルド・ベイسنの場合と同様に、カオスアトラクタ近傍のダイナミクスのみで決定される。またスペクトルの左端点は過渡過程によって決定され、その値が終状態鋭敏性を特徴づける不確定性指数と直接結び

ついている。さらに、終状態鋭敏性に基づいてベイスンの「境界」の定義を拡張でき、スペクトルの左端点は、このベイスン境界を特徴づけるフラクタル次元に等しい。

縞枯れとは亜高山帯の針葉樹林にみられる枯れ木層の動的パターンであり、古くから研究の対象となっている。先行研究において、いくつかのセル・オートマトンが提案され、現象を定性的に再現することが報告された。これらの数理モデルは一方で、縞枯れ現象に特徴的な規則正しい枯れ木層間隔を十分に再現できていない、もしくは間隔を均一にするには木々の成長率や環境変動に対応する変数にランダム性を導入する必要があった。

第二部の目的は縞枯れの新たなモデルを導入し、そのふるまいを解析することである。時間遅れをもつ連続時間格子モデルを導入し、その定常解を解析することで以下の結果を得た。周期的進行波解の族が共存し、これらの進行波解は、波長がシステムサイズの約数であるもの(規則正しい鋸の刃状のパターン)を含む。また、周期的進行波解の伝播速度は、波長に対して単調に増加する。さらに、周期解として存在するすべての進行波解は線形安定である。

本論文の構成は以下の通りである。第一部は全五章からなる。第一章では、多安定な力学系におけるベイスン構造の特徴づけという観点から研究背景を述べ、第二章以降に必要な基礎概念をまとめる。第二章では、まずフラクタル性を有するベイスンの特徴づける様々な特徴量、手法について詳細に述べる。次に、本研究に対して直接的な重要性をもつ先行研究について述べる。特に粗視化された力学系とマルコフ連鎖の対応づけと、リドルド・ベイスンのスペクトル解析に重点を置く。さらに、分配関数を用いてスペクトルを得る手法をリドルド・ベイスンの構造解析に適用し、先行研究と同じ結果が得られることを述べる。最後にリドルド・ベイスンをもつ力学系の例を紹介する。第三章では、インターミングルド・ベイスンをもつ区分線形な二次元写像を導入し、分配関数を用いてスペクトル解析を行う。過渡過程の乱雑さがベイスン構造に影響し、スペクトルに相転移を起こすことを示す。これにより先行研究で得られていた描像が解釈し直され、系の過渡的ダイナミクスがベイスン構造に寄与する可能性があることを示す。最後にインターミングルド・ベイスンの様々な例を紹介し、逐次的ベイズ推定過程がインターミングルド・ベイスンをもつことに触れる。第四章では、前章で用いたモデルと比べて多様な過渡過程を示すモデルを導入し、リドルド・ベイスンとインターミングルド・ベイスン双方のスペクトルが一般に相転移を起こすことを示す。また、終状態鋭敏性に基づいてベイスンの「境界」の定義を拡張し、その幾何学的複雑さを特徴づけるフラクタル次元を定義する。このフラクタル次元が、終状態の不確定性を定量化した重要な指数である不確定性指数と直接結びついていることを導き、この境界の再定義の重要性を主張する。第五章では、第一部で得られた結果を概観し、まとめる。また今後発展が望まれる方向性についても述べる。第二部は第六章のみからなる。第一節では、縞枯れを含む様々な地域で観測されてきた植生パターンに関する研究背景を概観する。また提唱されてきた種々のモデルを類別し、我々のモデルが既存のどのモデルとも異なることをみる。第二節ではモデルを導入し、固定されたパラメータに対して初期状態の違いによって現れる様々な進行波解を数値的に示す。またパターンが時間発展とともに規則正しくなるメカニズムに対して、クラスターのサイズによる伝播速度の違いに着目した簡単な説明を加える。第三節では、交通流のモデルと本研究の縞枯れモデルとの類似性を指摘する一方で、得られる周期的進行波解の伝播する速度に注目し本質的な差異に触れる。また本モデルの非線形性を弱めた場合でも、同様の周期的進行波解が得られることを数値的に示し、その伝播速度が非線形性をコントロールするパラメータの変化とともに不連続的に変化することを述べる。第四節では、モデルが最大でシステムサイズに近い数の異なる周期的進行波解をもつことを導き、ひとつの解に対し一意的に伝播速度が定まることを解析的に示す。また各周期解の線形安定性を示す。これにより系が実際に多安定であることを確かめる。

審査結果の要旨

本論文は、インターミングルド・ベイスンの構造および縞枯れのパターン形成について可解モデルを用いて研究したものであり、以下の成果を得ている。

- (1) 2通りの可解モデルを用いて、インターミングルド・ベイスンの多重フラクタル性を特徴付ける特異性指数スペクトルを厳密に求めた。
- (2) インターミングルド・ベイスンの特異性指数スペクトルが2つの要素から構成されることを示した。一方はカオスアトラクターが持つ多重フラクタル性を反映したものであり、他方はベイスン境界に対応したものである。さらに、特異性指数スペクトルには、これら2つの要素が存在することを反映した線形部分があらわれることを示した。
- (3) インターミングルド・ベイスンのベイスン境界に対応した集合を明確に定義することにより、これまで曖昧であった終状態鋭敏性を特徴付けるフラクタル次元の定義を明らかにし、インターミングルド・ベイスンの終状態鋭敏性の問題を解決した。
- (4) 亜高山帯に見られる立ち枯れた木が規則正しく整列する縞枯れについて、従来導入されていたセルオートマトンモデルを出発点として、連続時間の時間遅れ一方向結合系モデルを導入した。さらに、このモデルが様々な波長の周期的進行波解を持ち、それらは線形安定であることを示した。数値計算と組み合わせることにより、本モデルにおいて初期値に依存した多重安定性を持つ規則的パターンが自発的に形成されることを示した。

以上の諸成果は、これまで未解明であったインターミングルド・ベイスンの多重フラクタル構造と終状態鋭敏性の問題を解決し、また、縞枯れの新たな連続時間モデルを導入し厳密解を求めることにより規則的パターンが自発的に生成されることを示したものであり、本分野の学術的な発展に貢献するところ大である。また、申請者が自立して研究活動を行うのに十分な能力と学識を有することを証したものである。学位論文審査委員会は、本論文の審査ならびに最終試験の結果から、博士（工学）の学位を授与することを適当と認める。