

称号及び氏名 博士（工学） 森本 卓也

学位授与の日付 2006年9月30日

論文名 「Study on the Elastic Instability of Inhomogeneous Plates  
Subjected to Mechanical and Thermal Loads」  
(力学的および熱的負荷を受ける不均質平板の弾性不安定性に関する研究)

論文審査委員 主査 教授 谷川 義信  
副査 教授 杉村 延広  
副査 教授 三村 耕司

## 論文要旨

近年、傾斜機能材料（FGMs: Functionally Graded Materials）と呼ばれる新しい概念の材料が創造され注目を集めている。FGMs は主に平板や薄膜の形態で生成され、一方の表面から他方の表面へと組成分布、微視構造、気孔率などを変化させ、制御することによって要求する機能を発現させる材料であると位置づけられており、不均質材料の代表的な具体例であると言える。FGMs は無限の応用可能性を秘めていると考えられており、機械、航空、原子力、建築、バイオなどの多岐の分野で注目されている。新しい製品開発において求められる機能や性質を発現させるためには、FGMs の力学に関する基盤研究を材料プロセスに関する研究と平行して行うことが必要不可欠である。

不均質平板の力学に関する研究において、構造強度の観点から弾性不安定問題は重要な課題の一つとして位置づけられている。しかし、不均質平板の弾性不安定問題に関する解析的研究は、まだ端緒についたばかりであり、十分になされているとは言えない。線形座屈問題に関する研究は様々な荷重条件や境界条件、物性値の温度依存性、幾何学的初期不整、面外せん断変形の影響などを考慮した解析へと順次発展してきた。しかし、第一次近似としての臨界座屈荷重は簡潔な記述による有用性が重要視されることに対し、これまでの多くの研究では複雑な解析と数値解析が必要とされてきた。また、物性値が板厚方向の中央面に対して非対称な単純支持された不均質平板では曲げと伸びの変形の連成を生じるために、分岐座屈の様相を呈さないという事実に対して臨界座屈荷重が導出されており、物理的妥当性の欠如が指摘されている。これらの要求を満足する不均質平板の線形座屈解析法を構築する必要がある。一方、幾何学的非線形性を考慮した座屈後挙動に関する研究も線形座屈解析の発展的課題としてわずかな報告例が見受けられる。しかし、ポアソン比の不均質性が弾性不安定性に及ぼす影響を調べた解析的研究は見受けられない。

さらに、弾性床におかれた不均質平板や母材に不均質薄膜がコーティングされた構造の弾性不安定問題は十分に研究されているとは言えない。これらの構造系は不安定化の機構が本質的に異なる挙動を示すことが知られており、不均質性による新たな機能発現の可能性があると考えられる。

以上の背景のもとで、本論文は材料の巨視的な不均質性が平板の弾性不安定性に及ぼす影響を検討することを目的として、不均質平板が力学的及び熱的負荷を受ける場合の弾性不安定性に関する多岐にわたる諸問題を取り扱ったものである。特に、臨界座屈荷重を見積もること、および座屈後の挙動や弾性不安定性を予測することに力点を置いている。本論文は全7章から構成されており、各章の概要は以下のとおりである。

第1章「緒論」では、不均質材料から成る平板を対象とした座屈問題と座屈後挙動に関する研究の進展についてのレビューを行っている。力学的および熱的負荷を受ける線形座屈解析に関する研究において、不均質性に起因する面内と面外の変形の連成が理論解析を複雑にしていることを指摘し、物理的に整合した理論解析の必要性について言及している。さらに、以上の背景にもとづいて本論文の目的について述べている。

第2章「基礎方程式系の導出」では、平板の座屈モデルの基礎となる Föppl-von Kármán (FvK) 方程式を導出している。平板の幾何学的非線形性と厚さ方向の座標変数に依存する物性値を考慮して弾性ひずみエネルギーを評価し、その変分をとることにより基礎方程式系を導き、ポアソン比の不均質性が新たな曲げと伸びの連成ひずみエネルギーを生み出すことを示している。さらに、不均質性に対応した中立面を基準座標系にとり直すことにより、曲げと伸びの変形の連成が分離でき、さらにポアソン比が一定値をとるものと仮定することにより連成項が消失し、基礎方程式系を劇的に単純化できることを示している。

第3章「不均質平板の力学的座屈」では、第2章で導いた非連成 FvK 方程式を用いて、不均質長方形板が面内荷重を受ける座屈問題を取り扱っている。その結果、材料の不均質性は均質平板の曲げ剛性として再定義され、均質平板に対する座屈問題に帰着することができるという事実を見出している。次に、平板の境界条件が全周単純支持および一对辺単純支持・他對辺固定という代表的な場合に対して臨界座屈荷重を求め、材料因子（不均質性、直交異方性）と形状因子（アスペクト比、幅厚比）が及ぼす影響について検討している。その結果、ヤング率の不均質性が大きくなるとともに、座屈が生じやすくなるという新しい知見を得ている。

第4章「不均質平板の熱座屈」では、第2章で導いた非連成 FvK 方程式を用いて不均質長方形板が熱負荷を受ける場合の熱座屈問題を取り扱っている。平板は面外変形に対して単純支持、面内変形に対して完全固定されているものとし、面外方向と面内方向に関する温度場、材料因子（ヤング率、線膨張係数、熱伝導率の不均質性）、形状因子（アスペクト比、板厚比）が臨界座屈挙動に及ぼす影響について検討している。その結果、板厚方向に関して様な熱負荷を受ける場合でさえも線膨張係数の不均質性によって面外変位を生じ、分岐座屈の様相を呈さないことを見出している。さらに、面外変位が特異になる条件から臨界座屈温度を求めている。その結果、材料因子と形状因子の増加はそれぞれ臨界座屈温度を低下させるという知見を得ている。次に、面内方向の温度場が臨界座屈挙動に及ぼす影響について検討している。平板の面内にステップ状の局所的な非一様温度場を想定し、平面熱弾性解析によって応力分布を求め、Galerkin 法を用いた近似解法により一般化固有値問題に帰着して臨界座屈温度を決定するという手法を用いて解析し、その結果、臨界座屈温度は板の大きさと加熱領域の大きさの相対的な関係に依存することを見出している。さらに、板厚の中央面に対して非対称な材料物性を持つ平板の熱座屈解析を行い、この材料物性の非対称性と弾性安定論における初期不整との対応関係について検討している。最も簡素な単一モード方程式を導出し、その代数的解析を通して線膨張係数の不均質性の存在によって荷重-変位曲線は不完全ピッチフォーク分岐を示し、初期不整パラメータに対応していることを明らかにしている。さらに、サドルノード分岐点を座屈後の第二義的な臨界点と位置づけ、線膨張係数に関する不均質性の影響を検討している。その結果、不均質性の増加に伴い、臨界座屈温度は低下するのに対してサドルノード分岐点での臨界熱荷重は上昇するという事実を見出し

ている。

第5章「並進対称性を有する不均質平板の座屈後挙動」では、並進対称性を有する不均質平板（帯板）が等二軸圧縮荷重を受ける場合の座屈後挙動解析を行っている。特に、ポアソン比の不均質性が平板の座屈後挙動に及ぼす影響について検討することに焦点を当てている。ポアソン比の不均質性を考慮すると、第2章で導いた連成項を含んだ FvK 方程式系を用いなければならないため、解析が困難になる。そこで平板の座屈モードに並進対称性の仮定を課すことによって座屈後の合力、面外変位とその振幅を決定している。すなわち、非線形問題であるにもかかわらず、座屈後の厳密解を導くことに成功したといえる。次に、物性値が具体的なべき乗型の分布関数で与えられる場合において、座屈後の面外変位と合力に及ぼす不均質性の影響について検討した結果、特に座屈後の合力は面外変位に依存し、不均質性に応じて板幅の中央と両端に現れる最大値もしくは最小値が入れ替わるという事実を明らかにしている。

第6章「弾性床におかれた不均質平板の非線形挙動」では、第2章で導いたポアソン比の不均質性によって基礎方程式系に付加された連成項の効果について、系統的な理論解析を展開している。まず、一様応力状態下での線形安定性解析によって波数と線形成長率の関係を表す分散関係式を導き、特別な3つのケースについて、明示的に臨界荷重および臨界波数（波長）を導出している。また、これらに対して不均質性は本質的な影響を及ぼさないことを明らかにしている。さらに、材料と荷重のそれぞれの直交異方性が競合関係にあり、後者のほうが座屈モードに支配的な影響を及ぼすことを明らかにしている。つぎに、座屈後挙動に及ぼすポアソン比の不均質性の影響を調べるために、等二軸圧縮荷重下での等方性不均質平板に対して、特異摂動法を用いた弱非線形解析を行い、分岐点近傍での臨界モードの運動を記述する振幅方程式を導出している。この方程式より、不均質性の効果を取り入れるためには少なくとも3つのモード間の非線形相互干渉を考慮しなければならないことを明らかにし、さらに臨界荷重未満でヘキサゴンモードを生じるパラメータ領域が存在すること、およびヘキサゴンモードから稜線モードへの遷移を支配するパラメータ領域を見出している。また、座屈後の振幅方程式の平衡解の安定性について検討し、これらの結果を分岐図として提示している。

第7章「結論」では本論文の総括、および今後の課題と展望を示している。

## 審査結果の要旨

本論文は、傾斜機能材料に代表されるような不均質材料からなる平板の弾性不安定性に関する力学的挙動を解析的方法により取り扱ったものであり、以下のような成果を得ている。

- 1) まず、不均質平板の弾性不安定および座屈解析の基礎となる Föppl-von Kármán (FvK) 方程式を導出している。材料物性値が板厚方向に関して変化する場合、平板には曲げ変形と面内変形の連成を生じるため、基礎方程式系は極めて複雑で難解なものとなるが、不均質性に対応した中立面を基準座標系として導入することにより、曲げと伸びの連成を分離できる解析的手法を見出し、劇的に単純化された基礎方程式系を導出している。
- 2) 申請者が導出した上記の新しい基礎方程式系を用いて、不均質長方形板が面内負荷を受ける場合の座屈問題を解析し、縦弾性係数の不均質性は均質平板の場合の曲げ剛性として再定義され、さらに縦弾性係数の不均質性が大きくなるとともに、座屈（弾性不安定性）が生じやすくなるという新しい知見を得ている。
- 3) また、不均質平板に熱負荷が作用する場合の熱座屈問題についても取り扱い、板厚方向に関して一様な熱負荷を受ける場合でさえも、線膨張係数の不均質性により分岐座屈を起こさないという新しい知見を得ている。
- 4) さらに、不均質平板に非一様な局部加熱が作用する場合の熱座屈問題を取り扱い、臨界座屈温度を求めている。臨界座屈温度を、材料因子（縦弾性係数、線膨張係数、温度伝導率等）の不

均質性)、形状因子(板のアスペクト比、板厚比)などの変化に対して詳細に、かつ系統的に検討しており、この臨界座屈温度は平板の大きさと加熱領域の大きさとの相対的な関係に依存することを見出している。

以上の他にも、本論文では、不均質平板の弾性不安定挙動、座屈後挙動等について多くの新しい知見を得ており、これらの諸成果は機能性不均質材料の構造強度設計問題に対して多くの基礎的データを与えており、寄与するところ大である。また申請者が自立して研究活動を行うのに必要な能力と学識を有することを示したものである。

本委員会は、本論文の審査並びに最終試験結果から、博士(工学)の学位を授与することが適当と認める。