| | |
|---|---|
| 称号及び氏名 | 博士（理学） 山田 修久 |
| 学位授与の日付 | 平成 27 年 3 月 31 日 |
| 論　　文　　名 | Complex Floquet Eigenvalue Problem for the Relaxation Process of a Driven Unstable Quantum System<br>駆動不安定量子系の緩和過程の理論：<br>フロケ・ハミルトニアンの複素固有値問題 |
| 論文審査委員 | 主査　田中　　智<br>副査　溝口　幸司<br>副査　細越　裕子<br>副査　神吉　一樹 |

## 論文要旨

理学系研究科　物理科学専攻
物性理論研究室
山田修久

**-研究の目的-**

本研究の目的は，時間周期的外場下にある不安定量子系(以下，駆動不安定系) の理論的解析法を示し，不安定系が示す物理量の時間発展のマルコフおよび非マルコフ過程に対して時間周期的外場が及ぼす影響を解析することである．本研究の成果の一点目は，駆動不安定系に対するフロケ・ハミルトニアンの複素固有値問題の解である，複素フロケ固有ベクトルと，その固有値に対する分散方程式の厳密解を得たことである．二点目の成果は，駆動不安定系の不安定状態の生き残り確率の時間変化をマルコフおよび非マルコフ過程それぞれで解析し，各時間領域の外場による制御法を明らかにしたことである．

不安定系とは，時間的に不可逆な発展であるマルコフ過程を示す系である．不安定系が示す時間対称性の破れは，離散状態と連続状態の間のエネルギー共鳴に起因する．通常のヒルベルト空間での固有値問題で系を解析する限り，不安定系が示す時間対称性の破れの起源の説明は難しい．なぜなら，固有値問題の解は全て実固有値を持つ状態であり，それぞれの状態からの時間発展への寄与は，時間的に可逆な振動しか示さないからである．対して，拡張ヒルベルト空間での複素固有値問題で系を解析することで，複素固有値を持つ

共鳴状態が定義可能になる．この共鳴固有値の虚部こそ，時間的に不可逆な指数減衰の減衰率に対応した，時間対称性の破れの起源である．さらに，不安定系は，共鳴状態に由来するマルコフ過程だけでなく，その他の連続状態などに由来する非マルコフ過程も示す．自然現象が示す複雑な時間発展の理解の為には，これらの，時間に対して質的に異なる発展を解析することが必要不可欠である．

しかし，不安定系の時間発展の観測には，マルコフおよび非マルコフ過程それぞれで，困難がある．マルコフ過程の減衰率は系固有の量であり，どのような初期条件に対しても，不安定系は指数減衰を示す．不安定状態を崩壊させずに留めておくことは困難である．一方，非マルコフ過程には，観測の為の時間領域が非常に短い，物理量の強度が非常に小さいなどの困難がある．

近年，時間周期的外場を加えて量子系を制御するという理論，実験が注目を集めている．このような駆動量子系の解析は，フロケ理論によって，固有値問題の観点で解析可能である．しかし，フロケ理論による解析は，安定系に対するものがほとんであり，不安定量子系に時間周期的外場を加えた場合の理論解析はほとんど明らかになっていない．

これらのことから，本研究では，時間周期的外場を加えた不安定量子系を，複素固有値問題とフロケ理論を組み合わせた，フロケ・ハミルトニアンの複素固有値問題の観点で解析し，その時間発展のマルコフおよび非マルコフ過程の外場による制御法を明らかにした．

-論文の構成-

本論文は全 8 章で構成され，それらを 2 部に分けている．第 I 部は第 1 章から第 4 章で構成され，そこでは駆動不安定量子系のフロケ・ハミルトニアンの複素固有値問題の解法を示す．第 II 部は第 5 章から第 8 章で構成され，そこでは駆動不安定量子系の時間発展のマルコフおよび非マルコフ過程それぞれの解析を行う．

第 1 章では，第 I 部の序論として，不安定量子系と複素固有値問題，駆動量子系とフロケ理論について，先行研究から明らかになっていることを述べる．

第 2 章では，駆動不安定量子系のモデル系として，次式の駆動フリードリクス型ハミルトニアン系について解析する．

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_V + \hat{H}_T(t) \tag{1}$$

ここで，各項はそれぞれ，無摂動項，結合項，駆動項である．

$$\hat{H}_0 = \epsilon_d |d\rangle\langle d| + \sum_k \epsilon_k |k\rangle\langle k| \tag{2a}$$

$$\hat{H}_V = \sum_k \left[ v_k |k\rangle\langle d| + v_k^* |d\rangle\langle k| \right] \tag{2b}$$

$$\hat{H}_T(t) = A \sin(\omega t + \theta) |d\rangle\langle d| \tag{2c}$$

この系は d で示す一つの離散状態と，k で示す連続状態から成り，d 状態と k 状態はλvk

で結合している．ここで，$\lambda$ は無次元の結合定数であり，本論文では$\lambda \ll 1$ を満たす弱結合状況を考える. 時間周期的外場の効果で, 離散状態のエネルギー準位は, $\epsilon_d$ を中心に, エネルギー振幅 A，角振動数$\omega$ で正弦関数的に振動している．次式の，駆動フリードリクス型ハミルトニアン系に対するシュレーディンガー方程式を考える．

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle \tag{3}$$

ここにフロケ理論を適用することで，フロケ・ハミルトニアンを得る．さらに，関数空間を拡張し，拡張ヒルベルト空間でのフロケ・ハミルトニアンの複素固有値問題を解析し，その解法を示す．得られた複素フロケ固有状態を用いれば，系の時間発展演算子のスペクトル表現を得る．これにより，任意の初期条件に対して，任意の物理量の任意の時刻での値が求まる．

第 3 章では，具体的なフリードリクス型ハミルトニアン系として，1 次元ファノ・アンダーソン・モデル(以下, 1D FA モデル) を考え, その複素フロケ固有値について解析する. 1D FA モデルは，一つの離散状態と有限バンドを持つ連続状態から成り，そのバンド端に 1 次元系特有のヴァン・ホーフ特異性を持つ．ヴァン・ホーフ特異性により，通常の共鳴状態だけでなく, 永続的束縛状態という非解析的状態も固有状態として現れる. これら 2 種類の離散状態が，外場駆動の効果でどのように変化するかを解析する．

第 4 章では，第 I 部の結論として，駆動フリードリクス型ハミルトニアン系の複素フロケ固有状態と，それを具体的系に適用した駆動 1D FA モデルの複素フロケ固有値について総括する．

第 5 章では，第 II 部の序論として，不安定量子系が示す三つの時間領域と，マルコフおよび非マルコフ過程について紹介する．一般に，不安定量子系の時間発展には，放物型減衰を示す短時間領域，指数減衰を示す緩和時間領域，非指数型発展を示す長時間領域がある．このうち，緩和時間領域での指数減衰は時間的に不可逆なマルコフ過程であり，その他の短時間，長時間での発展は非マルコフ過程である．これらの時間領域が時間依存する外場によってどのように変化するかは，理論解析がほとんどなされていない．

第 6 章では，第 3 章で導入した具体的なフリードリクス型ハミルトニアン系である 1D FA モデルについて，その時間発展を詳しく解析する．まず，非駆動状況下での時間発展を解析し，それと比較して，外場駆動状況下での時間発展を調べる．1D FA モデルが持つ一つの離散状態は，連続状態とエネルギー共鳴を起こす場合は不安定になる．この不安定な離散状態の生き残り確率の時間変化を追うことで，不安定系が示す短時間，緩和時間，長時間領域での特徴的な振る舞いを解析することができる．特に，緩和時間領域での減衰率や長時間領域での強度は，離散状態のエネルギー準位と連続状態が作るエネルギー・バンドのバンド端とのエネルギー差に強く依存する．このエネルギー差を変化させることで，時間発展がどのように変化するかを解析する．次に，時間周期的外場を加えた場合の生き残り確率を解析する．外場駆動パラメーターとして，エネルギー振幅と振動数という独立な 2 変数があるので，特徴的な外場パラメーターを選び，生き残り確率の時間発展が，非

駆動状況下と比べてどのように変化するかを調べる．第 6 章で解析する生き残り確率 P(t) は次式で定義される．

$$\mathcal{P}(t) = |\langle d|\hat{U}(t,0)|d\rangle|^2 \tag{4}$$

ここで，時間発展演算子は次式で定義される．

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle \tag{5}$$

時間発展演算子は，第 I 部で得られた複素フロケ固有状態を用いて表現することができる．

第 7 章では，第 6 章で得られた外場駆動状況下での生き残り確率の時間発展を複素フロケ・スペクトル分解し，各時間領域での振る舞いを解析する．短時間領域での放物型減衰は全てのスペクトル成分の重ね合わせから成るが，それ以降の時間領域は，各スペクトル成分からの寄与として解析可能である．生き残り確率が指数減衰を示す緩和時間領域では，複素フロケ固有状態のうち，共鳴状態からの寄与が支配的である．解析の結果，外場駆動状況下でも，共鳴状態成分は指数減衰であり，その減衰率が外場によって劇的に変化するということが分かった．減衰率を外場駆動によって変化させることが，緩和時間領域のマルコフ過程の量子制御と対応している．非指数的発展を示す長時間領域では，連続状態，または永続的束縛状態からの寄与が支配的である．解析の結果，外場駆動によって連続状態成分，永続的束縛状態成分の時間に対する関数形はほとんど変化せず，その強度が劇的に変化することが分かった．外場駆動によって強度を変化させることは，長時間領域での非マルコフ過程の量子制御に対応している．

第 8 章では，第 II 部の結論として，外場駆動によるマルコフおよび非マルコフ過程の制御について総括する．

**-結果の考察-**

共鳴固有値の虚部は，系の減衰率γ に対応しており，その外場パラメーター依存性は図 1 のようになる．ここでは，外場パラメーターとして，α = A/ω とβ = B/ω を独立変数としている．ここで，B は 1D FA モデルのエネルギー・バンドの半幅である．その他のパラメーターは

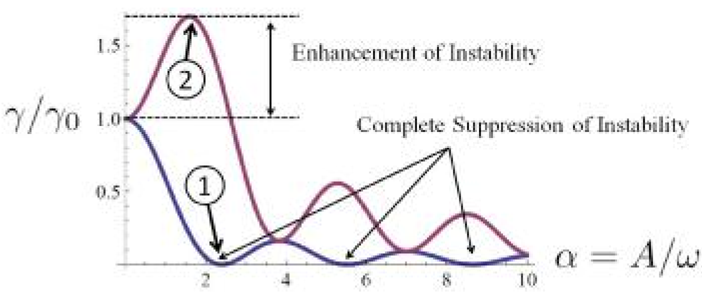


図 1: 減衰率の外場依存性：横軸はα，縦軸は減衰率γ/γ0 である．ここで，γ0 は非駆動状況下の減衰率である．

$\epsilon d/B = 0, \lambda V/B = 0.1$ である．図 1 の青線は$\beta = 1/3$，赤線は$\beta = 1/0.9$ である．これら 2 種類の$\beta$ に対して，$\alpha$ を連続的に変化させたときの減衰率$\gamma$ の変化を見る．青線の場合，$\alpha$ を増加させることで，$\gamma$ は振動しながら減少する．特に，$\alpha$ が 0 次ベッセル関数の 0 点を満たす点で，$\gamma$ は 0 になる．これを満たす$(\alpha, \beta)$ では，系の不安定性は完全に抑制される．対して，赤線の場合，$\gamma$ が一時的に$\gamma 0$ より大きい$\alpha$ の領域がある．この$(\alpha, \beta)$ 領域では，系の不安定性は増大する．減衰率は系固有の量であるが，人為的に可変な外場パラメーターを調整することで，不安定性の抑制から増大まで，多様な制御が可能であることが分かる．

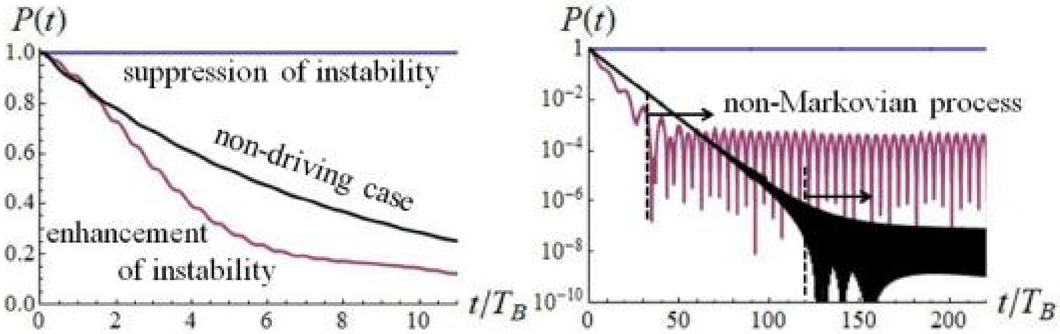


図 2: 生き残り確率 P(t) の時間変化：横軸は時間 t/TB，縦軸は生き残り確率である．

図 1 で示す 1 と 2 の$(\alpha, \beta)$ はそれぞれ，不安定性の抑制状況(状況 1)，増大状況(状況 2) に対応している．非駆動状況，状況 1，状況 2，それぞれでの生き残り確率 P(t) の時間変化を図 2 に示す．ここで，時間の単位は TB = $2\pi/B$ である．各線は，各外場パラメーター$(\alpha, \beta)$ に対応しており，黒は非駆動状況：(0,finite)，青は状況 1：(2.4,1/3.0)，赤は状況 2：(1.8,1/0.9) である．緩和時間領域(左図) を見ると，状況 1 では系が安定系のように振る舞うのに対して，状況 2 では不安定性が増大し，非駆動状況よりも指数崩壊が早くなっている．減衰率を外場によって制御することで，緩和時間領域での時間発展が劇的に変化していることが分かる．

一方, 長時間領域(右図) でも, $(\alpha, \beta)$ の違いが生き残り確率に大きな影響を与えている．非駆動状況では，P(t) は時刻 100 程度で緩和時間領域から長時間領域に転換している．状況 1 では，減衰率$\gamma$ が非常に小さいので，時刻 100 程度では P(t) はほとんど減衰していない．このことから，状況 1 の非マルコフ過程は，非駆動状況と比べて，超長時間で現れ，その値はとても小さくなる．これは，外場による非マルコフ効果の抑制現象である．対して，状況 2 では P(t) の指数崩壊が早まり，時刻 50 程度ですでに長時間領域に転換している．さらに，開始時刻が早まるだけでなく，非マルコフ効果の強度が，非駆動状況と比べて 4 桁ほど増大している．これは，外場による非マルコフ効果の増大現象である．

これらの結果から，外場駆動によって，マルコフ過程の減衰率と非マルコフ過程の強度は，互いに同期して抑制，または増大されるということが明らかになった．非駆動状況で

の 1D FA モデルにおいて，離散準位がバンド端に近ければ減衰率と非マルコフ強度が大きく，バンド端から遠ければ小さくなることを明らかにしたが，系のパラメーターは物質固有の量であるので，通常は人為的に変化させることはできない．実験対象が安定であるか，非マルコフ効果が大きいかなどは，物質に依存している．しかし，本研究の解析から，時間周期的外場を加えることで，あたかも，物質固有のパラメーターを変化させたのと同等な結果が得られることが分かった．この結果は，実験対象に対して時間周期的外場を加えることで，マルコフおよび非マルコフ過程に対して，こちらの望みの状況を作れるという可能性を示唆している．

学位論文審査結果の要旨

散逸系の量子ダイナミクスを微視的力学原理に基づき理解することは量子力学の原理的問題である。なぜなら通常のヒルベルト空間におけるハミルトニアンの固有関数展開を用いた時間発展には可逆的振動現象しか現れないからである。この原理的問題の解決のため、関数空間を自乗可積分外の関数にまで拡張した新しい量子力学の枠組みの構築（拡張ヒルベルト空間における複素固有値問題）が進んでいる。これまで、散逸自律系の量子ダイナミクスについての理論解析がなされてきたが、ハミルトニアンが露に時間に依存する非自律的量子散逸系（駆動量子不安定系）に対する理論解析は存在しない。解析を妨げる理由は、拡張ヒルベルト空間での量子ダイナミクスの研究が端緒についたばかりであることに加え、時間変化するハミルトニアンに対する固有値問題が一般には定義できないからである。

本研究では正弦周期的に時間変化する量子駆動不安定系に対して、フロケの方法を用いフロケ空間における定常的ハミルトニアン（フロケ・ハミルトニアン）を導き固有値問題が定義できることを示した。具体的に、この理論を１次元ファノアンダーソンモデルに適用し、フロケ･ハミルトニアンの複素固有値問題を解析的に解くことに成功した。さらに複素固有値の虚部として不純物準位の生き残り確率の減衰率の解析的表現を得た。その結果、系固有の減衰率は多重フロケ・バンドの重なりと外場振幅の比によって大きく変化することを明らかにした。特に、外場振幅がベッセル関数の零点と一致する場合に、共鳴特異性があるにもかかわらず減衰率がゼロとなる coherent destruction of tunneling が生じることを明らかにし、量子制御が可能であることを示した。

さらに、解析的に得られたフロケ複素固有関数による固有関数展開によって、不純物準位の生き残り確率の時間変化を求め、不可逆性の起因であるマルコフ過程成分と、可逆過程の起因である非マルコフ過程成分の比が、外場によって大きく変化することを示した。

以上のように，量子駆動不安定系に対する微視的原理に基づく厳密な理論解析は本研究が初めてであり、この研究成果の意義は高い。この成果は、拡張ヒルベルト空間における量子力学の有用性を具体的物理系に対して示したものであり、新しい量子コヒーレント制御法の開拓に重要な指針を与える研究成果である。

本委員会は本論文を学位論文として十分な内容を有しているものとして判断した。