称号及び氏名	博士（理学）　山中　聡恵
学位授与の日付	平成２５年３月３１日
論　　文　　名	Extension problem and duality of conditional entropy associated with a commutative hypergroup
論文審査委員	主査　　大内　本夫 副査　　入江　幸右衛門 副査　　丸田　辰哉

論文要旨

Extension problem and duality of conditional entropy associated with a commutative hypergroup

論文要旨

山中　聡恵

ハイパー群とは、局所コンパクト群とその群上で定義される測度の合成積のなす $*$-バナッハ環の概念を一般化したもので、公理は 1975 年頃 C. Dunkl, R. Jewett, R. Spector によって確立された。ハイパー群はいろいろなグラフや等質空間上のランダムウォークの記述に適合している。ハイパー群のモデルとしては、アソシエーション・スキーム、コンパクト部分群による群の両側商から決まるハイパー群、群の共役類から決まる共役類ハイパー群、群の既約表現らから決まる指標ハイパー群などがある。このように多くのモデルが知られているが、ハイパー群自身の構造については研究が進んでいるとは言い難い。

ハイパー群における重要な問題の一つは、ハイパー群の構造を決定することである。N. Wildberger は 1995 年に有限ハイパー群の解析を行い、2002 年に位数 3 のハイパー群の構造を全て決定した。しかしながら、位数 4 以上のハイパー群の構造は未解決な問題である。高い位数のハイパー群の構造を研究するために、構造のわかっている低い位数のハイパー群から、高い位数のハイパー群を構成する必要がある。そのような手段の一つとして、本研究で取り上げられているハイパー群の拡大がある。

K と H と L を局所コンパクトハイパー群とする。K が H による L の拡大ハイパー群であるとは、

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} K \xrightarrow{\varphi} L \longrightarrow 1$$

が完全系列であることをいう。与えられた H と L に対して、H の L による拡大ハイパー群 K の構造を全て求めよというのが拡大問題である。

次の問題として、拡大問題の双対性が挙げられる。可換ハイパー群 K に対して、K の指標全体の集合を $\hat{K}$ とおくと、K 上の関数の積によって $\hat{K}$ は実ハイパー群になる。実ハイパー群のカテゴリーにおいて、ハイパー群 K の双対性 $\hat{\hat{K}} \cong K$ が成り立つ。拡大ハイパー群の双対性とは、

$$1 \longrightarrow \hat{L} \longrightarrow \hat{K} \longrightarrow \hat{H} \longrightarrow 1$$

が完全系列であることを言い、これは実ハイパー群のカテゴリーにおいて常に成り立つ。K がハイパー群であっても、$\hat{K}$ はハイパー群とは限らない。その為、拡大問題を実ハイパー群のカテゴリーで考える必要があった。

本論文では多くの未解決な拡大問題を解決することができ、多くの低位数のハイパー群の構造を発見することができた。以下が本論文を構成する各章の概要である。

第 2 章は、第 3 章以降の基本的な必要事項を整理した。

第 3 章において、いくつかの拡大問題に取り組んだ。まず、有限可換ハイパー群のカテゴリーにおいて、黄金ハイパー群の有限アーベル群による拡大問題を解決した。また、分離型拡大の特徴づけを行った。ここで、黄金ハイパー群とは位数 3 のハイパー群であり、N. Wildberger が位数 3 のハイパー群を決定した際、位数 3 のハイパー群達の中で興味深い位置にあると指摘されたものである。

次に、有限可換ハイパー群よりも広い概念である局所コンパクト可換ハイパー群のカテゴリーにおいて、二つの拡大問題を考察した。

一つ目は、局所コンパクト可換ハイパー群のカテゴリーにおいて、位数 2 のハイパー群の局所コンパクトアーベル群による拡大問題を解決した。その結果、局所コンパクトアーベル群として 1 次元トーラスを取ると、2008 年に M. Voit が求めた二つの 1 次元トーラス $\mathbb{T}$ の互いに素な和集合 $\mathbb{T} \cup \mathbb{T}$ の上の可換ハイパー群の構造とまったく一致することが判明した。

二つ目は、局所コンパクト可換ハイパー群のカテゴリーにおいて、黄金ハイパー群の局所コンパクトアーベル群による拡大問題を解決した。その結果、局所コンパクトアーベル群として 1 次元トーラスを取ると、三つの 1 次元トーラス $\mathbb{T}$ の互いに素な和集合 $\mathbb{T} \cup \mathbb{T} \cup \mathbb{T}$ の上の可換ハイパー群の構造の一部を決定したことになる。これは、M. Voit の結果の一般化にあたる。

第 4 章においては、拡大問題と実ハイパー群の作用の関係について明らかにし、拡大問題を解決するための新しい手法を開発した。ここでは、実ハイパー群のカテゴリーで作用を考え、これを実作用と呼ぶこととした。

さらに第 5 章において、ハイパー群の既約な実作用 α のエントロピー $\mathcal{H}(\alpha)$ を定義した。

このエントロピーは、実ハイパー群の既約な実作用に対して、その作用で不変な確率測度がただ一つ存在することを示し、その確率測度のエントロピーを実作用のエントロピーとして定義したものである。このエントロピーが、二次元既約実作用の完全不変量であることを示した。

可換実ハイパー群 K に対して、K 上の測度空間の標準状態 ϕ に付随したエントロピー $\mathcal{H}_\phi(K)$ と正則作用に付随したエントロピー $\mathcal{H}(K)$ を定義し、次の双対性を証明した。

$$\mathcal{H}_\phi(K) = \mathcal{H}(\hat{K}),\ \mathcal{H}(K) = \mathcal{H}_{\hat{\phi}}(\hat{K}).$$

K の部分実ハイパー群 H に対して、条件付きエントロピー $\mathcal{H}_\phi^E(K|H)$ を定義した。K の H による商ハイパー群 L に対して、K の正規化されたハール測度に付随した条件付きエントロピー $\mathcal{H}(K|L)$ を定義した。この二つの条件付きエントロピーについて、次の双対の関係を示した。

$$\mathcal{H}_\phi(K|H) = \mathcal{H}(\hat{K}|\hat{H}),\ \mathcal{H}(K|L) = \mathcal{H}_{\hat{\phi}}(\hat{K}|\hat{L}).$$

これらのエントロピーを拡大問題に応用して、位数 2 のハイパー群の、位数 2 のハイパー群による拡大ハイパー群の同値類を決定した。これは拡大問題を考察する上での新しいアプローチである。

論文

(1) Extensions of the Golden hypergroups by locally compact abelian groups, S. Kawakami and S. Yamanaka, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **78**, 351–368, 2012.

(2) Duality of conditional entropy associated with commutative hypergroups, S. Yamanaka, Scientiae Mathematicae Japonicae, **75**, 163–176, 2012.

紀要等

(1) Extensions of the Golden hypergroup by finite abelian groups, S. Kawakami, K. Kawasaki and S. Yamanaka, 奈良教育大学紀要, **57**, 1–10, 2008.

(2) Extensions of hypergroups of order two by locally compact abelian groups, S. Kawakami, M. Sakao and S. Yamanaka, 奈良教育大学紀要, **59**, 1–6, 2010.

(3) Actions of finite hypergroups and applications to extension problem, S. Kawakami, I. Mikami, T. Tsurii and S. Yamanaka, 奈良教育大学紀要, **60**, 19–28, 2011.

(4) Signed actions of finite hypergroups and the extension problem, S. Kawakami, M. Sakao, T. Tsurii and S. Yamanaka, 奈良教育大学紀要, 13–24, 2012.

口頭発表

(1) 局所コンパクトアーベル群による黄金ハイパー群の拡大, 山中聡恵・河上哲・川崎謙一郎・三上いつみ, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会函数解析分科会, 講演アブストラクト, 8–9, 東京, 2008.

(2) ハイパー群の作用と拡大ハイパー群, 釣井達也・山中聡恵・三上いつみ・河上哲, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数解析分科会, 函数解析分科会アブストラクト, 77–78, 愛知, 2010.

(3) ハイパー群のエントロピーと拡大問題, 山中聡恵・河上哲, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数解析分科会, 函数解析分科会アブストラクト, 79–80, 愛知, 2010.

(4) ハイパー群の構造と拡大問題, 河上哲・山中聡恵, 作用素論・作用素環論研究集会, 作用素論・作用素環論研究集会報告集, 53–64, 東京, 2010.

(5) ハイパー群に付随した相対エントロピー, 山中聡恵, 作用素論・作用素環論研究集会, 作用素論・作用素環論研究集会報告集, 167–176, 沖縄, 2011.

(6) 非可換ハイパー群に付随した相対エントロピー, 山中聡恵・河上哲, 日本数学会 2012 年度春季総合分科会函数解析分科会, 函数解析分科会アブストラクト, 43–44, 東京, 2012.

(7) Signed actions of hypergroups and the extension problem, 釣井達也・山中聡恵・河上哲, 日本数学会 2012 年度春季総合分科会函数解析分科会, 函数解析分科会アブストラクト, 41–42, 東京, 2012.

(8) Duality of conditional entropy associated with commutative hypergroups, S. Yamanaka, Harmonic Analysis, Convolution Algebras, and Special Functions, München(Germany), 2012.

(9) 位数 2 のハイパー群による離散アーベル群の拡大問題, 坂尾祥文・釣井達也・山中聡恵・河上哲, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会函数解析分科会, 函数解析分科会アブストラクト, 79–80, 福岡, 2012.

学位論文審査結果の要旨

ハイパー群は群の概念を拡張したもので，その公理は 1975 年頃に確立されたが，ハイパー群自身の構造についてはいまだに十分な解明がなされていない．有限ハイパー群の構造に関して，位数 3 のハイパー群の構造はすべて決定されているが，位数 4 以上のハイパー群の構造はまだ完全にはわかっていない．高い位数のハイパー群の構造を研究するために，構造のわかっている低い位数のハイパー群から高い位数のハイパー群を構成する必要がある．そのような手段の１つとして，本論文で取り上げられているハイパー群の拡大がある．ハイパー群 H による L の拡大は完全系列

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 1$$

によって与えられる．H と L が与えられた時，すべての K の構造を決定せよというのが拡大問題である．本論文においては，可換群 H といくつかの構造のわかっているハイパー群 L に対して，拡大問題を解決している．またハイパー群の拡大はハイパー群の作用とも関係している．そのために，本論文においては，ハイパー群の作用についても研究している．一方，群の $*$-環上への作用や，$*$-環とその部分 $*$-環の研究において，様々なエントロピーが重要な役割を演じている．本論文においては，ハイパー群に自然に付随した $*$-環に対してこれらのエントロピーを適用して，ハイパー群に対してエントロピーの概念を導入している．本論文の主要な結果は以下の通りである．

1. 可換実ハイパー群 K に対して，K 上の測度空間の標準状態 ϕ に付随したエントロピー $\mathcal{H}_\phi(K)$ と正則作用に付随したエントロピー $\mathcal{H}(K)$ を定義し，次の双対性を証明した．

$$\mathcal{H}_\phi(K) = \mathcal{H}(\hat{K}), \qquad \mathcal{H}(K) = \mathcal{H}_{\hat{\phi}}(\hat{K})$$

2. K の部分実ハイパー群 H に対して条件付きエントロピー $\mathcal{H}_\phi(K|H)$ を定義し，K の H による商ハイパー群 L に対して条件付きエントロピー $\mathcal{H}(K|L)$ を定義し，次の双対性を証明した．

$$\mathcal{H}_\phi(K|H) = \mathcal{H}(\hat{K}|\hat{H}), \qquad \mathcal{H}(K|L) = \mathcal{H}_{\hat{\phi}}(\hat{K}|\hat{L})$$

以上得られた成果は，ハイパー群の拡大問題に大きく貢献するものであり，今後，ハイパー群の構造に関する研究において活用されることが期待される．

本委員会は当該論文が博士 (理学）の学位を授与するに相当すると判断した．

学位論文審査委員会
入江　幸右衛門
大内　本夫　（委員長）
丸田　辰哉