

称号及び氏名	博士（工学） 田中 武史
学位授与の日付	平成 21 年 3 月 31 日
論文名	「The Isomorphism Problem and the Automorphism Groups of Unipotent Algebraic Groups」 (ユニポテント代数群の同型問題及び自己同型群)
論文審査委員	主査 兼田 均 副査 栗木 進二 副査 田畑 稔

## 論文要旨

まず、本論文の結果を述べるのに必要な用語、約束、既知の結果を説明する。可換体  $K$  は代数閉体であるとする。  $G$  を  $x, y \in G$  に対して演算が  $xy$  と書かれるような群の構造を備えた  $K$  上の代数多様体とする。  $(x, y)$  を  $xy$  に写す写像  $\mu: G \times G \rightarrow G$  と  $x$  をその逆元  $x^{-1}$  に写す写像  $\iota: G \rightarrow G$  がどちらも代数多様体の射であるとき、  $G$  を代数群（または群多様体）という。特に、  $G$  がアフィン代数多様体ならば、  $G$  をアフィン代数群という。代数群の準同型とは、代数多様体の射であって、群の準同型でもあるものをいう。  $\phi: G \rightarrow G'$  を代数群の準同型とする。代数群のある準同型  $\phi': G' \rightarrow G$  が存在して、  $\phi' \circ \phi$  が  $G$  上の、  $\phi \circ \phi'$  が  $G'$  上の恒等射であるとき、  $\phi$  を代数群の同型という。二つの代数群  $G$  と  $G'$  に対して、代数群の同型  $\phi: G \rightarrow G'$  が存在するとき、  $G$  と  $G'$  は同型であるという。さて、代数群が代数多様体として既約であることは（ザリスキ）位相空間として連結であることと同値である。慣習として、代数群  $G$  が代数多様体として既約であるとき、  $G$  は連結であるという。また、代数群  $G$  の次元は  $G$  の代数多様体としての次元である。

$K$  の元を成分とする  $n$  次正則行列のなす群  $GL_n(K)$  はアフィン代数群である。このアフィン代数群  $GL_n(K)$  を  $n$  次一般線形群という。アフィン代数群はある一般線形群  $GL_n(K)$  のある閉部分群と同型であることが知られている。  $U_n$  を  $u \in GL_n(K)$  で  $u - I_n$  がべき零であるようなもの全体がなす  $GL_n(K)$  の部分集合とする。アフィン代数群  $G$  がある  $n$  に対して  $U_n$  に含まれる  $GL_n(K)$  の閉部分群と同型であるとき、  $G$  はユニポテントであるという。  $U_n$  の閉部分群は対角成分が 1 である  $n$  次上三角行列のなす  $GL_n(K)$  の閉部分群のある閉部分群

と共役であることが知られている．また，ユニポテント代数群に関して次の三つのことが知られている．

- ユニポテント代数群の閉部分群はユニポテントであり，ユニポテント代数群の準同型による像もユニポテントである．
- 基礎体の標数が 0 のとき，ユニポテント代数群は常に連結である．
- 代数群  $G$  が連結かつユニポテントであるための必要十分条件はある  $n$  に対して  $G$  が代数多様体として  $n$  次元アフィン空間と同型であることである．

$n$  個の  $K$  の直積集合  $K^n$  に成分ごとの和によって演算を定義するとアフィン代数群ができる．この代数群を  $n$  次元ベクトル群といい， $\mathbb{G}_a^n$  と書く．1次元ベクトル群は省略して  $\mathbb{G}_a$  と書く． $n$  次元ベクトル群は  $n$  個の 1次元ベクトル群の直積と同型であることを注意しておく．また， $\mathbb{G}_a^0$  は単位群を表すものとする．ベクトル群は連結ユニポテント代数群の最も簡単な例である．

$G$  を代数群とする． $G$  の自己同型全体は合成に関して群をなす．この群と同型である群を  $G$  の自己同型群という．もし二つの代数群が同型ならば，それぞれの自己同型群も同型である．したがって，ある条件を満たす代数群に対してその自己同型群を求めようとするとき，その代数群と同型である代数群で自己同型群の計算が簡単であるものを探するという方法が考えられる．このとき代数群の同型問題，すなわち，与えられた二つの代数群が同型であるかどうかを決定する問題が重要となる．

以下に本論文の各章の内容をまとめる．大きく，基礎体の標数が正である場合を扱った第 1, 2 章と，基礎体の標数が 0 である場合を扱った第 3 章に分かれる．

第 1 章では，標数が正である代数閉体  $k$  上のベクトル群に対して自己同型群を調べた．もし体  $k$  の標数が 0 ならば， $n$  次元ベクトル群  $\mathbb{G}_a^n$  の自己同型群は  $GL_n(k)$  となる．しかし，体  $k$  の標数が正ならば， $n = 1$  の場合を除いて， $n$  次元ベクトル群  $\mathbb{G}_a^n$  の自己同型群は  $GL_n(k)$  よりも真に大きくなる．第 1 章では，標数が正である代数閉体  $k$  上のベクトル群の自己同型群を生成する「基本自己同型」の集合を構成した．さて，一般に  $G$  から直積  $G_1 \times G_2$  への準同型全体のなす集合と  $G$  から  $G_1$  への準同型と  $G$  から  $G_2$  への準同型の組全体のなす集合の間には一対一対応が存在する． $G$  から直積  $G_1 \times G_2$  への準同型  $\phi$  に対応する  $G$  から  $G_1$  への準同型  $\phi_1$  と  $G$  から  $G_2$  への準同型  $\phi_2$  を  $\phi$  の成分という．第 1 章では， $n$  次元ベクトル群  $\mathbb{G}_a^n$  から  $d$  次元ベクトル群  $\mathbb{G}_a^d$  への準同型  $\phi_1$  が多項式の組によって与えられたとき， $n$  次元ベクトル群  $\mathbb{G}_a^n$  から  $(n-d)$  次元ベクトル群  $\mathbb{G}_a^{n-d}$  へのある準同型  $\phi_2$  が存在して，組  $(\phi_1, \phi_2)$  が  $n$  次元ベクトル群  $\mathbb{G}_a^n$  の自己同型を定めるための必要十分条件を得た．ただし  $1 \leq d \leq n$  である． $\phi_1$  がこの条件を満たすかどうかは計算によって確かめることができる．特別な場合として， $n$  次元ベクトル群の自己準同型が多項式の組で与えられたとき，それが自己同型であるかどうかを計算によって判定できる．

第2章では、基礎体  $K$  の標数が正である場合に3次元の連結ユニポテント代数群を考察した。一般に、代数閉体  $K$  上の連結ユニポテント代数群の群演算は、適当に座標を選べば、次のような形に書けることが知られている。

$$z_i = x_i + y_i + P_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, \dots, y_{i-1}),$$

ここで  $(z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)$  であり、 $P_i$  は  $(2i-2)$  変数の  $K$  に係数を持つ多項式である。第2章では特に、次のような種類の3次元の連結ユニポテント代数群を考察した。すなわち、3次元アフィン空間上の群演算が  $K$  に係数を持つ4変数多項式  $P_3$  によって

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + P_3(x_1, x_2, y_1, y_2))$$

のように表され、単位元が  $(0, 0, 0)$  であるような代数群である。ここに現れる多項式  $P_3$  の全体は  $K$  ベクトル空間をなす。より精密には、

$$Lf(X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) = f(X_1, X_2, Y_1, Y_2) + f(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, Z_1, Z_2),$$

$$Rf(X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) = f(Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) + f(X_1, X_2, Y_1 + Z_1, Y_2 + Z_2),$$

で定められる二つの  $K$  線型写像  $L, R: K[X_1, X_2, Y_1, Y_2] \rightarrow K[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2]$  を考え、 $D = L - R$  とする。このとき、多項式  $P_3$  は  $\text{Ker } D$  の元で、 $f(0, 0, Y_1, Y_2) = f(X_1, X_2, 0, 0) = 0$  を満たすものとして特徴付けられる。第2章では、このベクトル空間を斉次多項式のなす部分空間の直和に分解し、直和成分それぞれの基底を得た。第2章のこの定理は体  $K$  が代数的に閉じていなくても成り立つ。

第3章では、基礎体  $\mathbb{K}$  の標数が0の代数閉体である場合に、余次元が1の可換な正規閉部分群を持つ  $(n+1)$  次元ユニポテント代数群の自己同型群を調べた。一般に、 $\mathbb{K}$  上のアフィン代数群  $G$  には対応する  $\mathbb{K}$  上のリー代数  $\mathcal{L}(G)$  が存在する。体  $\mathbb{K}$  の標数が0のとき、二つのユニポテント代数群  $G$  と  $G'$  が同型であることはそれぞれに対応する  $\mathbb{K}$  上のリー代数  $\mathcal{L}(G)$  と  $\mathcal{L}(G')$  が同型であることと同値である。また、ユニポテント代数群  $G$  の自己同型群は  $\mathbb{K}$  上のリー代数  $\mathcal{L}(G)$  の自己同型群と同型である。 $\mathbb{K}$  上のリー代数  $\mathcal{L}(G)$  の自己同型群は一般線形群  $GL_{n+1}(\mathbb{K})$  の閉部分群であるので、アフィン代数群  $G$  の自己同型群を一般線形群  $GL_{n+1}(\mathbb{K})$  の閉部分群とみなすことができる。また、体  $\mathbb{K}$  の標数が0のとき、ユニポテント代数群に対応するリー代数はべき零である。したがって、ユニポテント代数群を同型によって分類することは、べき零リー代数を同型によって分類することと同等であるが、べき零リー代数の分類は標数が2でない一般の体の場合で6次元まで、代数閉体と実数体の場合で7次元まで達成されている。第3章では、まず、余次元が1の可換な正規閉部分群を持つ  $(n+1)$  次元ユニポテント代数群の同型による類別に対して完全代表系を得た。この完全代表系は  $n$  次元ベクトル群と1次元ベクトル群の半直積  $\mathbb{G}_a^n \rtimes \mathbb{G}_a$  からなる。より詳しくいうと、段落の最初で述べたような性質を持つ任意のユニポテント代数群  $G$  に対して、 $\mathcal{L}(G)$  と  $\mathcal{L}(\mathbb{G}_a^n \rtimes \mathbb{G}_a)$  が同型になるような代数群の半直積  $\mathbb{G}_a^n \rtimes \mathbb{G}_a$  が同型を除いて一意的に存在

する．さらに，それぞれの類の代表，すなわち半直積  $\mathbb{G}_a^n \rtimes \mathbb{G}_a$  の同型類の代表それぞれに対して，対応する  $\mathbb{K}$  上のリー代数  $\mathcal{L}(\mathbb{G}_a^n \rtimes \mathbb{G}_a)$  の自己同型群はあるユニポテント代数群といくつかの一般線形群の直積との半直積と同型であることを示した．また，ここに現れる一般線形群のサイズと個数も与えた．

## 審査結果の要旨

本論文は，体上で定義されたユニポテント代数群を研究したもので，次のような成果を得ている．但し，ユニポテント代数群とは，対角成分が 1 である上三角行列全体よりなる群の閉部分群と同型な代数群である．

(1) 体の標数は正， $n$  を 2 以上整数とする． $n$  次元ベクトル群の自己同型全体よりなる群を  $n$  次元ベクトル群の自己同型群という． $n$  次正則行列による自己同型も基本自己同型であるように基本自己同型を定義し，自己同型群が基本自己同型で生成されること，即ち任意の自己同型は有限個の基本自己同型の合成として表せること，を示した．さらに，自己同型は  $n$  個の多項式の組で与えられるが， $n$  個以下の  $d$  個の多項式の組が与えられたとき，それらに  $(n - d)$  個の多項式を付け加えて自己同型が得られるための必要十分条件を与えた．

(2) 体の標数は正， $n$  を 2 以上整数とする． $n$  次元連結ユニポテント代数群は  $(n - 1)$  次元連結ユニポテント代数群の拡大群として得られことが知られていて，1 次元，2 次元連結ユニポテント代数群までは全て知られている．本論文では，2 次元連結ユニポテント代数群である 2 次元ベクトル群の拡大群として得られる全ての 3 次元連結ユニポテント代数群を求めた．これらの群は，ある条件を満たす 4 変数の多項式で記述される．

(3) 体の標数は零とする．このとき， $n$  次元ユニポテント代数群を分類することと， $n$  次元べき零リー環を分類することは同値であり，7 次元までのべき零リー環の分類結果が知られている．本論文では， $n$  次元可換正規部分群を持つ  $(n + 1)$  次元連結ユニポテント代数群を分類し，各同型類の自己同型群を求めた．このような  $(n + 1)$  次元連結ユニポテント代数群の同型類と，正整数  $n$  の分割の仕方が 1 対 1 に対応している．また，このような  $(n + 1)$  次元連結ユニポテント代数群の自己同型群は，幾つかの一般線形群の直積群とある連結ユニポテント代数群との半直積である．

これらの成果は，ユニポテント代数群に関する新たな知見を与えるとともに新たな研究課題を提起しており，ユニポテント代数群研究の発展に寄与するところ大である．また，申請者が自立して研究活動を行うのに必要な能力と学識を有する事を証したものである．学位論文審査委員会は，本論文の審査ならびに最終試験の結果から，博士（工学）の学位を授与することを適当と認める．