| | |
|---|---|
| 称号及び氏名 | 博士(理学)　土居　駿也 |
| 学位授与の日付 | 2022 年 3 月 31 日 |
| 論　文　名 | Higher Graded Symmetries in Classical and Quantum Mechanics<br>（古典力学および量子力学における高次の次数付き対称性） |
| 論文審査委員 | 主査　会沢　成彦<br>副査　田中　智<br>副査　野口　悟 |

# 論文要旨

# Higher Graded Symmetries in Classical and Quantum Mechanics

# 古典力学および量子力学における高次の次数付き対称性

理学系研究科物理科学専攻
数理物理研究室
土居駿也

**研究背景**

対称性は現代の物理における基本原理である．物理における基本的な対称性としては，時間や空間の並進対称性が挙げられる．これは時間や空間の起点を変えても，物理法則は変わらない事を意味する．さらに重要な事は，これらの対称性の帰結としてエネルギー保存則や運動量保存則が得られるという事である．対称性と保存則の関係をより正確に述べたものが Noether の定理である．Noether の定理の主張は，物理系の作用が連続変換に対して不変である場合，それぞの変換に対応する保存量が一つ存在するという事である．この定理から，対称性により個々の物理系などに依存しない普遍的な法則を導くことができるといえる．

対称性は理論構築においても重要な役割を果たしている．Einstein は Lorentz 対称性を要請し特殊相対性理論を，更に一般座標変換に対する対称性から一般相対性理論を構築した．素粒子の理論はゲージ変換に対する対称性を課したゲージ理論によって記述されている．現代では，このように理論構築の際にどのような対称性を課すかといった事を起点として研究が行われている．

時空の並進などの対称性は Lie 群や Lie 代数によって記述される．これに対して，素粒子物理学などでよく用いられる超対称性を記述するのは超 Lie 群や超 Lie 代数である．これらは Lie 群や Lie 代数に，加法群 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ による次数付けを与えたものである．超 Lie 代数を定義する関係式は，元が持つ次数により交換子または反交換子で与えられる．この $\mathbb{Z}_2$ による次数付けは，一般の可換群へ拡張が可能であり，その際に得られる代数は高次の次数付き超代数と呼ばれる．

高次の次数付き超代数は半世紀前に導入され，数学においては代数学や幾何学の側面から研究が行われてきた．一方，物理においては超重力理論や超弦理論との関係が議論されたが，超 Lie 代数と比較すると高次の次数付き超代数の物理への応用は非常に稀な物であった．ところが，近年，高次の次数付き対称性を持つ物理系がいくつか報告されている．その例として，パラボゾンとパラフェルミオンの混合系やスピン 1/2 を持つ粒子の非相対論的波動方程式や超対称量子力学の新たな拡張といったものが挙げられる．これらの例では，対称性は全て高次の次数付き超代数の中でも最も単純かつ非自明なものである $\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き超代数によって与えられている ($\mathbb{Z}_2^2$ は二つの $\mathbb{Z}_2$ の直積を表し，$\mathbb{Z}_2^2 = \{(0,0), (1,1), (0,1), (1,0)\}$ である)．これらの研究では，より簡単かつ基礎的な物理においても高次の次数付き対称性が現れており，それらの対称性が多くの分野で重要であることを示唆している．

**目的と成果**

これまでの研究はいろいろな分野における $\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き対称性の存在を明らかにしたが，このことから $n>2$ の場合の $\mathbb{Z}_2^n$ 次数付き対称性も同様にいろいろな分野に存在することが期待される．そこで，超対称量子力学と超対称共形量子力学を用いて，これらの $\mathbb{Z}_2^n$ 次数付き拡張の可能性を調べ，この新しい対称性が物理においても特別なものではない事を示すことが本論文の目的である．これは，高次の次数付き対称性が物理においてどのような役割を果たすかを明らかにする第一歩となりうる．

本論文の内容は以下の通りである．

第 1 章から第 3 章は，歴史的な背景と先行研究についてのまとめである．

第 4 章では，$\mathbb{Z}_2^n$ 拡張を行う前段階として，$\mathbb{Z}_2^2$ 超対称量子力学をより深く理解するために，より大きな $\mathbb{Z}_2^2$ 対称性を持つ量子力学のモデルを構築することを試みた．その結果，より多くの超電荷を持つものや，共形対称性を持つ $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称量子力学を得ることができた．

第 5 章では，通常の超対称量子力学と Clifford 代数を組み合わせることにより，$\mathbb{Z}_2^n$ 超対称量子力学のモデルを作れる事を示し，それらのモデルのスペクトルの特徴と中心元の縮退について議論した．また，この方法ではひとつの超対称量子力学から複数の異なる $\mathbb{Z}_2^n$ 超対称量子力学のモデルを作ることができ，モデル間の比較も行った．

第 6 章では，任意の超 Lie 代数と Clifford 代数を組み合わせることにより，様々な超対称共形量子力学モデルの $\mathbb{Z}_2^n$ 拡張が存在する事を示した．その具体例として，$\mathfrak{osp}(1|2)$ 超対称共形量子力学モデルを $\mathbb{Z}_2^3$ 拡張したもののスペクトル解析を行った．

量子力学は古典力学を量子化したものであるので，$\mathbb{Z}_2^n$ 超対称量子力学が存在するならば，それに対応する $\mathbb{Z}_2^n$ 古典力学が存在するはずである．第 7 章では，$\mathbb{Z}_2^2$ 古典力学を超場形式で定式化することを試みた．しかし，$\mathbb{Z}_2^2$ 超場には 3 つの問題が存在している．1 つ目は，超場は $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称代数の無限次元表現であり，古典力学のモデルを得るためには有限次元表現を取り出す必要があること．2 つ目は，$\mathbb{Z}_2^2$ 超対称代数の既約表現に関する研究は行われていないため，どのような既約表現が存在するかは明らかでないこと．3 つ目は，作用の $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称不変性とラグランジアンの積分可能性の関係が明らかでないことである．これらの問題を解決するために，$\mathbb{Z}_2^2$ 超対称代数の有限次元既約表現を求め，それらが超場にどのような条件を与えることで得られるかを明らかにした．さらに，それらの超場を用いたラグランジアンの積分可能性が，作用の $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称不変性を保証していることも明らかにした．以上の結果を用いて，$\mathbb{Z}_2^2$ 超対称不変な古典力学の作用を 4 種類得ることができた．

Journal：

- *$\mathcal{N}$-Extension of double-graded supersymmetric and superconformal quantum mechanics*,
  N. Aizawa, K. Amakawa, S. Doi,
  Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 065205 (2020) (14 pages).

- *$\mathbb{Z}_2^n$-Graded extensions of supersymmetric quantum mechanics via Clifford algebras*,
  N. Aizawa, K. Amakawa, S. Doi,
  Journal of Mathematical Physics **61**, 052105 (2020) (13 pages).

- *$\mathbb{Z}_2^3$-Graded Extensions of Lie Superalgebras and Superconformal Quantum Mechanics*,
  S. Doi, N. Aizawa,
  Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **17**, 071 (2021) (14 pages).

- *Classification of the reducible Verma modules over the Jacobi algebra $\mathcal{G}_2$*,
  N. Aizawa, V. K. Dobrev and S. Doi,
  Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **54**, 475202 (2021) (42 pages).

- *Comments of $\mathbb{Z}_2^2$-supersymmetry in superfield formalism*,
  S. Doi, N. Aizawa,
  Nuclear Physics B **974**, 115641 (2022) (17 pages).

Proceedings：

- *Color Algebraic Extension of Supersymmetric Quantum Mechanics*,
  N. Aizawa, K. Amakawa, S. Doi,
  M. B. Paranjape et al. (eds), Quantum Theory and Symmetries, 199-207, CRM Series in Mathematical Physics, Springer, Switzaland (2021).

# 学位論文審査結果の要旨

学位論文題目

Higher Graded Symmetries in Classical and Quantum Mechanics

(古典力学および量子力学における高次の次数付き対称性)

提出者氏名　土居 駿也

高次の次数付き対称性は, Lie 代数に可換群による次数付けをしたものにより生成される対称性である. 長い間, これらの対称性は物理的に重要なものとは考えられていなかったが, 近年の研究により, 超対称調和振動子, 非相対論的 Dirac 方程式などの簡単かつ基本的な系をはじめとして, さまざまなところに存在していることが明らかになった. このことは, 高次の次数付き対称性は特殊なものではなく, Lie 代数や超 Lie 代数が生成する対称性と同様に物理学にとって有用かつ本質的なものである可能性を示唆している. そのため, 高次の次数付き対称性の数理構造を明らかにし, その物理的意味を明確にしようという機運が高まっている.

本論文では, 超対称量子力学を $\mathbb{Z}_2^2$ 拡張したもの (Bruce-Duplij モデル) を題材として, 量子力学と古典力学における高次の次数付き対称性を考察し, 次の結果を得ている (なお, $\mathbb{Z}_2^n$ は $n$ 個の $\mathbb{Z}_2$ の直積の略記である).

<u>量子力学における成果</u>：

(1) Bruce-Duplij モデルの超電荷の数を増やすことに成功し, これらのモデルにおいてポテンシャルが $x^{-2}$ であるときは, 共形対称性も持つことを示した.

(2) 任意の $n$ に対して $\mathbb{Z}_2^n$ 拡張した超対称量子力学のモデルを具体的に構成することに成功し, ひとつの $n$ に対し複数の等価でないモデルが存在することを明らかにした.

(3) 超 Lie 代数 $osp(2n|2), D(2,1;\alpha), F(4)$ などで生成される対称性を持つ共形量子力学を $\mathbb{Z}_2^n$ 拡張することに成功した. その具体例として $\mathbb{Z}_2^3$ 超対称共形量子力学について詳しく議論している.

また, 上記の各モデルの基底状態, スペクトルの特徴なども明らかにしている. この結果は, 量子力学における超対称性や共形対称性は容易に $\mathbb{Z}_2^n$ に拡張することができることを示したもので, 量子論おける対称性に新たな知見を与えている.

<u>古典力学における成果</u>:

前述の $\mathbb{Z}_2^n$ 超対称量子力学は $\mathbb{Z}_2^n$ 超対称な古典力学系を量子化して得られるはずである. しかし, 最も簡単な $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称な力学系でさえ相互作用を持つ物を求めることは簡単ではなく, 先行研究でも十分に満足できる結果は得られていない. 通常の超対称な理論では超場形式という方法を用いると相互作用を含む作用積分を簡単に求められることが知られている. 一方, 超場形式を $\mathbb{Z}_2^n$ に拡張する際には超対称のときには存在しないさまざまな問題がある. そこで, $\mathbb{Z}_2^2$ の超場形式に存在する問題点を最小超対称の場合に精査し, それらの問題を解決することにより $\mathbb{Z}_2^2$ 超場形式を確立した. 特に, $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称代数の 4 次元既

約表現を分類し, それらを $\mathbb{Z}_2^2$ 超場を用いて表す方法を見出したこと, および, $\mathbb{Z}_2^2$ 超場を用いても必ずしも $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称な作用積分が得られない点を明らかにしたことは, 今後の $\mathbb{Z}_2^n$ 超対称性の研究に大きく資するものである. さらに, 超場形式が有効な場合には, それを用いて $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称な作用積分を 4 種類求めている.

以上のように, 本研究は高次の次数付き超対称性・共形対称性の量子論・古典論の研究を大きく進展させるものであり, 本委員会は本論文が学位論文として十分な内容を持つものと判断した.

委員長　会沢 成彦
田中 智
野口 悟