

称号及び氏名 博士（工学） 小坂 篤志

学位授与の日付 平成 26 年 3 月 31 日

論文名 「Structure and Profile of Solutions to Superlinear Elliptic Equations」
(優線型楕円型方程式の解構造と解の形状)

論文審査委員 主査 教授 壁谷 喜継
副査 教授 栗木 進二
副査 教授 田畑 稔
副査 准教授 松永 秀章
副査 講師 川上 竜樹

論文要旨

自然現象や経済現象の数理モデルを、偏微分方程式を用いて表すことは広く行われており、またその歴史も古い。特に二階の偏微分方程式、中でも楕円型方程式、放物型方程式、双曲型方程式は古典的な取り扱いも含めると、最もよく研究されている偏微分方程式である。例えば電磁気学や熱力学においては、電磁波の伝播は波動方程式により、静電場は Laplace 方程式により、熱伝導は熱方程式によりそれぞれ表される。

更に、自然現象を詳細に考察する場合、そのモデルはしばしば非線型偏微分方程式を用いて表される。

19 世紀以前の数学においてこのような非線型方程式の解の性質を研究することは多くの場合非常に困難であったが、関数解析的手法の発展により、現在では非線型方程式の解の存在や一意性、更には解の形状、挙動やパラメータ依存性など、解の詳細な性質が研究されるようになった。

本論文では優線型楕円型方程式と呼ばれる非線型偏微分方程式を取り扱う。この方程式は、例えば Gierer と Meinhardt による生物の形態生成モデルや Keller と Segel による走化性モデル等の定常状態、あるいは光ファイバー中のパルス光を記述する非線型 Schrödinger 方程式の定在波や、恒星の力学的平衡状態を表している。

本論文の目的は、有界領域上で優線型楕円型方程式の解の形状や解集合の構造を解明することである。特に、定義領域の幾何学的性質が解の形状や解集合の構造に対して与える影響に焦点をおいて解析を行う。

また、Euclid 空間内の領域だけでなく、単位球面上の領域という定曲率を持った多様体上における解の存在に対する結果を与え、多様体の曲率が解集合の構造に及ぼす影響を調べることも目的とする。本論文は全 4 章から構成されており、各章の内容は以下の通りである。

第 1 章では, 本研究の背景や先行研究, および本研究で得られた主結果の概要を紹介する. 本論文の主結果は, 第 2 章の Euclid 空間内の有界領域上における結果と, 第 3, 4 章の単位球面内の測地球上における結果に分けられる. 本章ではそれらの主結果に関わる先行研究を述べ, また, Euclid 空間と単位球面では解の存在にどのような差異が現れるかについても述べている.

第 2 章では, 優線型楕円型方程式の一種である scalar field 型方程式の特異摂動時における解の形状を考察した. これは Gierer--Meinhardt モデルや Keller--Segel モデルの定常解としてスパイク解を構成する研究と関連しており, 冪乗型非線型項を持つ方程式に対しては多くの先行結果がある. 具体的には, 斉次 Neumann 境界条件下において, Lin (林), Ni (倪) および高木 (1988) による最小エネルギー解の存在証明や, Ni と高木 (1991, 1993) による最小エネルギー解が最大点をただ一つ持つ解であることの証明, およびその形状に関する結果が知られている (最小エネルギー解とは, 方程式から自然に導かれるエネルギー汎関数の正值最小臨界値を達成する解). 一方, 斉次 Dirichlet 境界条件下においては, Ni と Wei (魏) (1995) によって同様の研究がなされ, 最小エネルギー解の性質が調べられた. またその後, 複数の最大点を持つ解に関しても多くの結果が報告されている.

本研究では, 2 次元 Euclid 空間内の有界領域上で定義された指数型非線型項を持つ半線型楕円型方程式を取り扱い, 斉次 Dirichlet 境界条件下における最小エネルギー解の存在, およびその正值性や最大点がただ一つ存在することを証明した.

また特異摂動時には, 最大点が境界から最も遠い点に漸近することや, その最大値が上に有界であり, $\epsilon \rightarrow 0$ にも収束しないことも証明し, 一方で, 最大点の近傍以外の値は一様に 0 に収束することも証明した. 以上の結果は, 特異摂動時の最小エネルギー解が, ただ一つの最大点を持つスパイク解であることを意味している.

これらの結果は冪乗型非線型項を仮定した場合における Ni と Wei の結果と同様のものであるが, 解の存在や最大点の有界性の証明においては彼らの議論に修正を施す必要があった.

更に, 非線型項に対して追加の条件を仮定した場合, この最小エネルギー解の形状をより詳しく解析した結果を得ることができた. これはやはり, Ni と Wei が冪乗型非線型項の場合に示したものと同様の結果である. すなわち, 彼らは有界領域上の問題から導かれる, 全空間の問題における解に対して一意性と非退化性の両方を仮定した. そして, 特異摂動時には最小エネルギー解の形状が, その全空間の問題の解に対して適当に変数変換を施した関数で近似される, ということを示した.

本研究では, 全空間の問題において解の一意性さえ仮定されていれば, その非退化性は, 解の一意性および非線型項に対する他の条件から従うことを証明した. したがって本研究で対象となる方程式に関しては, 全空間の問題の解に対して一意性と非退化性の両方を仮定する必要は無く, 一意性のみを仮定すれば十分である. また, この事実は本質的な変更なしに, Ni, 高木や Ni, Wei が与えた条件をみたすような非線型項を持つ方程式に対しても, 正当化することが可能である.

以降の第 3, 4 章では, 対象を単位球面内の領域上で定義された優線型楕円型方程式へ移し, その解の存在と解集合の構造を調べた. 具体的には, 方程式の定義領域を, 北極点を原点とする測地球とし, その測地半径と解の存在の間の関係を詳細に調べることを目的とした.

第 3 章では優線型楕円型方程式の中でも最も単純な Emden 方程式に対して, 第 3 種境界条件を課した上で, その正值球対称解の存在と一意性, およびそれらの測地半径や境界条件内

のパラメータに対する依存性を調べた (測地球上における球対称解とは、北極点からの測地距離にのみ依存する解). Emden 方程式のみを扱った理由は、解の存在と各種パラメータの関係を詳細に調べるためである. この問題に最初に着手したのは Bandle, Brillard および Flucher (1998) である. 彼らは、3次元以上の測地球上で定義された Emden 方程式の正值球対称解の存在を証明した.

また、Bandle と Peletier (1999) は前述の Bandle, Brillard, Flucher の結果における 3次元の場合をより詳細に調べ、解が存在しうる測地半径の具体的な値や解の一意性を証明した. 彼らは両者とも、方程式の冪乗型非線型項が臨界 Sobolev 指数を持ち、かつ斉次 Dirichlet 境界条件下が課されている場合を取り扱っている.

本研究では、斉次 Dirichlet 境界条件より一般的な第 3 種境界条件の下で Emden 方程式の解の存在を考察し、正值球対称解が存在するようなパラメータの範囲が、具体的な関数を用いて書き表せることを証明した.

その主結果によると、斉次 Dirichlet 境界条件下では測地半径が $\pi/2$ 以下の場合には正值球対称解が存在しないにもかかわらず、第 3 種境界条件下では、測地半径が十分小さい場合に対しても必ず正值球対称解が存在することがわかる. これは、斉次 Dirichlet 境界条件下では見られなかった事実であり、第 3 種境界条件に取り換えたことによる最も大きな影響の 1 つと考えられる.

また、法線方向微分の影響が大きくなると正值球対称解が存在する測地半径の範囲が増え、更に法線方向微分の影響が十分大きくなると、任意の測地半径に対して正值球対称解が存在することも主結果から明らかになった. このことは、第 3 種境界条件における法線方向微分の項が、解の存在させるような影響を与えていることを意味する. このように、本論文で得られた主結果によって、Emden 方程式の正值球対称解の解構造に対してより包括的な知見を与えることができた.

第 4 章では、正值球対称解以外の解の存在とその解集合の構造を考察した. 本論文内でも述べた通り、測地球上の優線型楕円型方程式に関する先行研究においては、主に正值球対称解を対象として、その解の存在や一意性、解集合の構造に関する研究が行われてきた. しかし、それ以外の符号変化するような解や、球対称ではない解に関する研究は、著者の知る限りではほとんど行われていない. 本論文で得られた主結果は、そのような解も含めた研究に対する先駆的なものである.

本研究では、測地球は 2次元球面上で定義されているとする. これはのちに領域上で線型方程式の固有値問題を考えたときに、まずは比較的簡単な低次元の場合において問題を取り扱うためである. また、境界条件は斉次 Dirichlet 境界条件を仮定し、優線型楕円型方程式の解を構成した. その証明は、まず方程式を自明解の周りで線型化し、次にその線型化された方程式の固有値を調べ、そしてその固有値を分岐点とする分岐解の局所存在を証明する、という手順で行った.

本章内の議論では、測地球の半径が π に十分近い場合、すなわち球面上に十分小さい穴が開いた領域上においてのみ研究を行った. そのように測地半径を制限した理由は、一般の測地半径に対して線型化問題の固有値の多重度を正確に調べるのが容易ではなく、本研究では測地半径が π に十分近い場合にのみ精密な結果が得られたからである. その結果、地球上の Laplace--Beltrami 作用素の第 j 固有値は $2j-1$ の多重度を持っているが、ここで球面上に十分小さな穴をあけた場合、この第 j 固有値が多重度 1 の固有値 1 個と、多重度 2 の固有値 j 個に分離する、ということが明らかになった. そして固有値の多重度が明らかになったため、Lyapunov と Schmidt による分岐解の構成法を用いて非自明な分岐解を構成した. これらの非自明な分岐解の形状は、パラメータが分岐点に十分近い場合には、線型化問題の固有関数の形状に十分近い.

したがって、第1固有値から分岐する分岐解は正值球対称であり、一方、それ以外の固有値から分岐する分岐解は、その固有値の多重度が1の場合は符号変化する球対称解、また、多重度が2の場合は符号変化する非球対称解である、という結果を得ることができた。

審査結果の要旨

本論文は、優線型楕円型方程式の解の性質について研究したものであり、関数解析的手法と常微分方程式の手法を巧みに用いることで、以下の知見を得ている。

1. 細胞性粘菌の集中現象を記述する Keller-Segel 方程式から導かれる定常問題の解の性質について解明した。この問題においては、非線形項に指数関数が現れ、ベキ乗型の非線形と異なり扱いが難しい。しかし、Sobolev の埋め込み定理を精査することで、その困難を克服し、変分法を巧みに用いて最小エネルギー解と呼ばれる定常解の存在を示した。解の存在を保証した後、さらに最小エネルギー解の形状について特異摂動下での考察を加え、最小エネルギー解は、境界からもっとも遠い場所の近傍に最大値を持ち、最大点の近傍を除いて、解はほぼゼロであることを示した。この証明において、全空間での定常問題の解の一意性と非退化性を用いるのであるが、自然な仮定の下、解の一意性から非退化性が従うことを示した。
2. 4次元ユークリッド空間内の単位球面上の領域において、Sobolev の臨界指数を持つ Lane-Emden 方程式の第三種境界値問題を、ユークリッド空間での単位球上の問題と比較しつつ考察を加えた。曲率の影響により解の存在範囲がユークリッド空間とは異なることは先行研究により一部明らかにされていたが、異なる理由を明確にし、さらに第三種境界条件において解の存在・非存在を、北極を中心とした任意の測地球上において完全に解明した。
3. 3次元ユークリッド空間内の単位球面上の、ほぼ球面全体を覆う領域において非線形楕円型方程式を考察した。符号変化する非対称な解を自明解を各固有値からの分岐として、その存在を証明した。固有値は一般に多重性があり分岐解の存在を証明することは難しいのであるが、その困難を克服した。また、固有値の分布に関して新たなことを発見した。即ち、球面全体のラプラス作用素の固有値には多重度があるが、領域の摂動により、その多重性が一部壊れ、多重度の低いいくつかの固有値に分離することを示した。

以上の諸成果は、対称性のある方程式に非対称な解が存在することを系統的に示し、また、対称な解についても、より詳細な性質を示したものである。ゆえに、本分野の学術的・産業的な発展に貢献するところ大である。また、申請者が自立して研究活動を行うのに必要な能力と学識を有することを証したものである。

本委員会は、本論文の審査ならびに最終試験の結果から、博士（工学）の学位を授与することを適当と認める。