称号及び氏名	博士（　理学　）　大須賀　昇
学位授与の日付	平成 19 年 9 月 30 日
論　　文　　名	「Consistency results about the cardinal invariants of certain ideals on the real line （実数上のあるイデアルの基数不変量に関する無矛盾性について）」
論文審査委員	主査　加茂　静夫 副査　石井　伸郎 副査　馬野　元秀

論文要旨

1960 年代にコーエン[1, 2]が「強制法」というこれまでになかった新しい手法を用いて連続体仮説の独立性を証明して以来，実数直線の構造に関する多くの問題が提起されてきた．強制法とは，通常の数学が展開できる基礎モデルで定義される擬順序集合を用いて基礎モデルに存在しないジェネリックフィルターと呼ばれる擬順序集合の部分集合が存在する拡張モデルを得る論法である．強制法で用いる擬順序集合のことを強制概念と呼ぶ．多くの集合論研究者によって様々な強制概念が定義されている．それらは無矛盾性に関する問題を解決するために用いられ，多くの結果が得られている．

1919 年にボレル[3]は，実数のルベーグ測度零集合の新しい部分クラスを導入した．この部分クラスは σ-イデアルであり，強ルベーグ測度零イデアルと呼ばれている（[4]を参照）．一般に, X 上のイデアル I が与えられるとそのイデアルに関する 4 個の基数不変量：加法性，被覆数，正集合濃度，共終数が次のように定義され，それぞれ add(I), cov(I), non(I), cof(I)で表される．

$$\mathrm{add}(I) = \min\{|F| : F \subseteq I \text{ かつ } \cup F \in I\},$$
$$\mathrm{cov}(I) = \min\{|F| : F \subseteq I \text{ かつ } \cup F = X\},$$
$$\mathrm{non}(I) = \min\{|Y| : Y \subseteq X \text{ かつ } \neg(Y \in I)\},$$
$$\mathrm{cof}(I) = \min\{|F| : F \subseteq I \text{ かつ } \forall A \in I\ \exists B \in F\ (A \subseteq B)\}.$$

2002 年に依岡[5]は強ルベーグ測度零イデアルの共終数に関する結果を得ているが，その過程において自然数から自然数への単調増加な関数 f に対して「イデアル I_f」を導入した. f が単調増加関数である場合，I_f は σ-イデアルとなることが依岡によって証明されている．イデアル I_f はルベーグ測度零集合全体から成る null イデアルや至るところで稠密でない実数の部分集合の可算和全体から成る meager イデアル，または強ルベーグ測度零イデアルと同じように実数直線の構造に関係している．

本論文では，イデアル I_f の基数不変量に関する次の 2 種類の問題(1), (2)を扱う．(1)添え字の関数 f を固定した場合にイデアル I_f の 4 個の基数不変量の値の取り方に関する無矛盾性問題．(2)異なる 2 つの添え字の関数 f と g に対するイデアル I_f と I_g の構造の違い，特にイデアル I_f と I_g の被覆数もしくは正集合濃度の値の違いに関する無矛盾性問題．本論文では，これらの問題に関し

て研究を行い得られた次の結果について述べている．

(1)の問題に関する研究と結果．公理的集合論における公理系を ZFC 公理系と呼ぶ．自然数から自然数への単調増加関数 f に対するイデアル I_f に関して $\omega_1 \leqq \mathrm{add}(I_f) \leqq \mathrm{cov}(I_f) \leqq \mathrm{cof}(I_f)$ と $\mathrm{add}(I_f) \leqq \mathrm{non}(I_f) \leqq \mathrm{cof}(I_f) \leqq c$ は ZFC 公理系から導かれる．連続体仮説が成り立つ場合，連続体濃度 c は ω_1 と等しいので全ての基数不変量の値が ω_1（または，連続体濃度）と一致する．連続体仮説が成り立たない場合，関数 f を固定した場合にイデアル I_f の基数不変量のそれぞれの値がどのように振る舞う可能性を持つかは大変興味深い．連続体仮説が成り立たない場合として、主に連続体濃度が ω_1 より大きい最小の濃度である ω_2 と等しい場合について研究した．イデアル I_f の基数不変量の値の割り当てのいくつかに関しては，考えた全ての既存の強制概念で得られる拡張モデルで成り立たない結果を得た．そのような値の割り当てについては，独自に強制概念を定義することによってその値の割り当てが成り立つ拡張モデルを得た．これらの結果をまとめると，連続体濃度が ω_2 と等しい場合のイデアル I_f の基数不変量の矛盾しない全ての値の割り当てが ZFC 公理系から相対的に無矛盾である．この結果を(1)の問題に関する研究結果として本論文では述べている．

(2)の問題に関する研究とその結果．イデアル I_f は添え字の関数 f を変えることで構造が大きく異なる可能性がある．異なる 2 個の関数 f と g に対するイデアル I_f と I_g の基数不変量の値の違いについても興味を持った．特に，イデアル I_f と I_g の被覆数や正集合濃度が異なる値を取る可能性を持つことは大変興味深い問題である。イデアル I_f の被覆数と正集合濃度は，自然数の組み合わせ論的な概念から得られる基数不変量と関係がある．イデアル I_f と I_g の被覆数と正集合濃度の違いに関する問題を一度自然数の組み合わせ論的な概念の問題に置き換えることで問題をより明確にした．その結果，任意の g に対してうまく f と強制概念を定めることで，イデアル I_f と I_g の被覆数もしくは正集合濃度の値が異なる拡張モデルが得られた．まとめると，次の 2 つの定理が成り立つ．本論分では，これらの結果を(2)の問題の研究結果として述べている．

定理 1　基礎モデルにおいて，連続体仮説が成り立つと仮定する．任意の単調増加関数 g に対して，単調増加関数 f と強制概念 P が存在して，P によって得られる拡張モデルで $\mathrm{cov}(I_f) < \mathrm{cov}(I_g)$ が成り立つ．

定理 2　基礎モデルにおいて,連続体仮説の否定とマルチンの公理が成り立つと仮定する．任意の単調増加関数 g に対して，単調増加関数 f と強制概念 Q が存在して，Q によって得られる拡張モデルで $\mathrm{non}(I_g) < \mathrm{non}(I_f)$ が成り立つ．

審査結果の要旨

実数構造を解明する指標として、実数上のσ-イデアルから得られる四つの基数不変量：加法数、被覆数、正集合数、共終数がある。実数上のσ-イデアルのひとつである強ルベーグ測度零イデアル SN から得られるこの四つの基数不変量は、その値が連続体より大きくなる可能性があり、他の良く知られたイデアルと比べ、扱いが困難である。イデアル SN を解明する上で重要となるσ-イデアルの族 I_f 達（ただし、f は自然数上の単調増加な写像）がある。本研究は、これ等のイデアル達から得られる四つの基数不変量の振る舞いを調べている。

本学位論文の主要な結果は次の通りである。

（１）自然数上の単調増加な写像 f に対して、

I_f の加法数＜I_fの被覆数　かつ　I_f の加法数＜I_f の正集合数、
I_f の正集合数＜I_f の被覆数、
I_f の被覆数＜I_f の正集合数、
I_f の非複数＜I_f の共終数　かつ　I_f の正集合数＜I_f の共終数

のそれぞれを満たす拡張模型の構成が可能である。即ち、イデアル I_f の四つの基数不変量は、一般のσ-イデアルが無条件に満たす不等式以外は切り離しが可能である。

（２）基礎模型で、「連続体仮説」が成り立つとする。自然数上の単調増加な写像 f に対して、適当な写像 g により、

I_f の被覆数＜ I_g の被覆数

となる拡張模型の構成が可能である。

（３） 基礎模型で、「マルチンの公理」と「連続体仮説の否定」が成り立つとする。自然数上の単調増加な写像 f に対して、適当な写像 g により、

I_g の正集合数＜ I_f の正集合数

となる拡張模型の構成が可能である。

（２）と（３）は、特に、興味を引く結果である。拡張模型を構成する場合、既に様々な拡張模型が知られているが、既存の拡張模型においては、単調増加な写像 f に無関係に I_f の被覆数と正集合数が決まる。そこで、本研究においては、強制概念についての性質（「性質 E」）を導入し、その性質を満たす強制概念が求める拡張模型を与えることを示し、その性質を満たす強制概念を構成している。本研究の成果は、強制を用いて実数構造の持ちえる可能性を解明する分野における質のよい興味ある内容であると判断する。

本委員会は、学位論文の審査および最終試験の結果から、申請者に対して博士（理学）の学位を授与することを適当と認める。